

### § 57\*. Рациональные корни целочисленных многочленов

Выше было указано, что вопрос о разложении данного многочлена над полем рациональных чисел на неприводимые множители ни имеет практически сколько-нибудь удовлетворительного решения. Однако частный случай этого вопроса, относящийся к выделению линейных множителей многочлена с рациональными коэффициентами, т. е. к разысканию его рациональных корней, уже весьма прост и решается без больших вычислений. Само собой разумеется, что вопрос о разыскании рациональных корней многочленов с рациональными коэффициентами ни в какой мере не исчерпывает общего вопроса о действительных корнях этих многочленов, т. е. методы и результаты, изложенные в девятой главе, сохраняют полностью свое значение и для многочленов с рациональными коэффициентами.

Приступая к вопросу о разыскании рациональных корней многочленов с рациональными коэффициентами, отметим, что, как было указано в предшествующем параграфе, можно ограничиться рассмотрением лишь многочленов с целыми коэффициентами; мы будем при этом рассматривать отдельно случай целых и случай дробных корней.

*Если целое число  $\alpha$  служит корнем многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то  $\alpha$  будет делителем свободного члена этого многочлена.*

В самом деле, пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Разделим  $f(x)$  на  $x - \alpha$ :

$$f(x) = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}).$$

Выполняя деление методом Горнера, изложенным в § 22, мы получим, что все коэффициенты частного, в том числе и  $b_{n-1}$ , являются целыми числами, а так как

$$a_n = -\alpha b_{n-1} = \alpha(-b_{n-1}),$$

то наше утверждение доказано<sup>1)</sup>.

Таким образом, если целочисленный многочлен  $f(x)$  обладает целыми корнями, то они будут найдены среди делителей свободного члена. Необходимо, следовательно, испытать всевозможные делители свободного члена, как положительные, так и отрицательные; если ни один из них не является корнем многочлена, то целых корней наш многочлен вообще не имеет.

<sup>1)</sup> Было бы ошибкой доказывать эту теорему ссылкой на то, что свободный член  $a_n$  является (с точностью до знака) произведением всех корней многочлена  $f(x)$ : среди этих корней могут встретиться и дробные, и иррациональные, и комплексные, и поэтому заранее нельзя утверждать, что произведение всех этих корней, кроме  $\alpha$ , будет целым.

Испытание всех делителей свободного члена может оказаться весьма громоздким, если даже значения многочлена будут вычисляться методом Горнера, а не непосредственной подстановкой каждого из делителей вместо неизвестного. Следующие замечания позволяют несколько упростить эти вычисления. Прежде всего, так как 1 и  $-1$  всегда служат делителями свободного члена, вычисляем  $f(1)$  и  $f(-1)$ , что не представляет затруднений. Если, далее, целое число  $\alpha$  является корнем для  $f(x)$ :

$$f(x) = (x - \alpha) q(x),$$

то, как указано выше, все коэффициенты частного  $q(x)$  будут целыми числами, и поэтому частные

$$\frac{f(1)}{\alpha-1} = -q(1), \quad \frac{f(-1)}{\alpha+1} = -q(-1)$$

должны быть целыми числами. Таким образом, подлежат испытанию лишь те делители  $\alpha$  свободного члена (из числа отличных от 1 и  $-1$ ), для которых каждое из частных  $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ ,  $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$  является целым числом.

Примеры. 1. Найти целые корни многочлена

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6.$$

Делителями свободного члена служат числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Так как  $f(1) = -8, f(-1) = -8$ , то 1 и  $-1$  не являются корнями. Далее, числа

$$\frac{-8}{2+1}, \quad \frac{-8}{-2-1}, \quad \frac{-8}{6-1}, \quad \frac{-8}{-6-1}$$

являются дробными, и поэтому делители 2,  $-2, 6, -6$  должны быть отброшены, в то время как числа

$$\frac{-8}{3-1}, \quad \frac{-8}{3+1}, \quad \frac{-8}{-3-1}, \quad \frac{-8}{-3+1}$$

—целые, и поэтому делители 3 и  $-3$  еще подлежат испытанию. Применим метод Горнера:

$$\begin{array}{r} | 1 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & | & 1 & -5 & 14 & -48 \end{array}$$

т. е.  $f(-3) = -48$ , и поэтому  $-3$  не является корнем для  $f(x)$ . Наконец

$$\begin{array}{r} | 1 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & | & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

т. е.  $f(3) = 0$ ; число 3 служит корнем для  $f(x)$ . Одновременно мы нашли коэффициенты частного от деления  $f(x)$  на  $x - 3$ ;

$$f(x) = (x - 3)(x^2 + x + 2).$$

Легко видеть, что частное  $x^2 + x + 2$  не имеет числа 3 своим корнем, т. е. это число не является кратным корнем для  $f(x)$ .

2. Найти целые корни многочлена

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2.$$

Здесь делителями свободного члена будут  $\pm 1$  и  $\pm 2$ . Далее,  $f(1) = -1$ ,  $f(-1) = 1$ , т. е. 1 и  $-1$  не служат корнями. Наконец, так как числа

$$\frac{1}{2+1} \text{ и } \frac{-1}{-2-1}$$

дробные, то 2 и  $-2$  также не будут корнями и поэтому многочлен  $f(x)$  вообще не имеет целых корней.

Переходим к вопросу о дробных корнях.

*Если целочисленный многочлен, старший коэффициент которого равен единице, имеет рациональный корень, то этот корень будет целым числом.*

Пусть, в самом деле, многочлен

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

с целыми коэффициентами имеет корнем несократимую дробь  $\frac{b}{c}$ , т. е.

$$\frac{b^n}{c^n} + a_1 \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}} + a_2 \frac{b^{n-2}}{c^{n-2}} + \dots + a_n = 0.$$

Отсюда

$$\frac{b^n}{c^n} = -a_1 b^{n-1} - a_2 b^{n-2} c - \dots - a_n c^{n-1},$$

т. е. несократимая дробь равна целому числу, что невозможно.

*Для получения всех рациональных (дробных и целых) корней целочисленного многочлена*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

нужно найти все целые корни многочлена

$$\varphi(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_0 a_2 y^{n-2} + \dots + a_0^{n-2} a_{n-1} y + a_0^{n-1} a_n$$

и разделить их на  $a_0$ .

В самом деле, умножим  $f(x)$  на  $a_0^{n-1}$ , а затем совершим замену неизвестного, положив  $y = a_0 x$ . Очевидно, что

$$\varphi(y) = \varphi(a_0 x) = a_0^{n-1} f(x).$$

Отсюда следует, что корни многочлена  $f(x)$  равны корням многочлена  $\varphi(y)$ , разделенным на  $a_0$ . В частности, рациональным корням  $f(x)$  будут соответствовать рациональные же корни  $\varphi(y)$ ; так как, однако, старший коэффициент  $\varphi(y)$  равен единице, то эти корни могут быть лишь целыми, и мы уже имеем метод для их разыскания.

Пример. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2.$$

Умножая  $f(x)$  на 3<sup>3</sup> и полагая  $y = 3x$ , получим:

$$\varphi(y) = y^4 + 5y^3 + 3y^2 + 45y - 54.$$

Ищем целые корни многочлена  $\varphi(y)$ .

Найдем  $\varphi(1)$  методом Горнера:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ 1 & \hline & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}.$$

Таким образом,  $\varphi(1) = 0$ , т. е. 1 является корнем для  $\varphi(y)$ , причем

$$\varphi(y) = (y - 1) q(y),$$

где

$$q(y) = y^3 + 6y^2 + 9y + 54.$$

Найдем целые корни многочлена  $q(y)$ . Делителями свободного члена служат числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54$ . Здесь

$$q(1) = 70, \quad q(-1) = 50.$$

Вычисляя  $\frac{q(1)}{\alpha-1}$  и  $\frac{q(-1)}{\alpha+1}$  для каждого делителя  $\alpha$ , мы обнаружим, что должны быть отброшены все делители, кроме  $\alpha = -6$ . Испытаем этот делитель:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ -6 & \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}.$$

Таким образом,  $q(-6) = 0$ , т. е.  $-6$  служит корнем для  $q(y)$  и поэтому для  $\varphi(y)$ .

Многочлен  $\varphi(y)$  имеет, следовательно, целые корни 1 и  $-6$ . Рациональными корнями многочлена  $f(x)$  будут, таким образом, числа  $\frac{1}{3}$  и  $-2$  и только они.

Следует еще раз подчеркнуть, что изложенные выше методы применимы только к многочленам с целыми коэффициентами и только для разыскания их рациональных корней.

### § 58\*. Алгебраические числа

Всякий многочлен  $n$ -й степени с рациональными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел  $n$  корней, некоторые из которых (или даже все) могут лежать вне поля рациональных чисел. Однако не всякое комплексное или действительное число служит корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Те комплексные (в частности, действительные) числа, которые являются корнями таких многочленов, называются *алгебраическими* числами в противоположность числом *трансцендентным*. К числу алгебраических чисел принадлежат все рациональные числа, как корни многочленов первой степени с рациональными коэффициентами, а также всякий радикал вида  $\sqrt[n]{\alpha}$  с рациональным подкоренным числом  $\alpha$ , как корень двучлена  $x^n - a$ . С другой стороны, в больших курсах математического анализа доказывается трансцендентность числа  $e$  — основания системы натуральных логарифмов, а также известного из элементарной геометрии числа  $\pi$ .

Если число  $\alpha$  алгебраическое, то оно будет даже корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами и поэтому корнем