Найдем $\varphi(1)$ методом Горнера:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ \hline 1 & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}.$$

Таким образом, $\varphi(1)=0$, т. е. 1 является корнем для $\varphi(y)$, причем

$$\varphi(y)=(y-1)\,q(y),$$

где

$$q(y)=y^3+6y^2+9y+54.$$

Найдем целые корни многочлена $q(y)$. Делителями свободного члена служат числа ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, ±27, ±54. Здесь

$$q(1)=70, \quad q(-1)=50.$$

Вычисляя $\frac{q(1)}{\alpha-1}$ и $\frac{q(-1)}{\alpha+1}$ для каждого делителя α, мы обнаружим, что должны быть отброшены все делители, кроме $\alpha=-6$. Испытаем этот делитель:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ \hline -6 & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}.$$

Таким образом, $q(-6)=0$, т. е. -6 служит корнем для $q(y)$ и поэтому для $\varphi(y)$.

Многочлен $\varphi(y)$ имеет, следовательно, целые корни 1 и -6. Рациональными корнями многочлена $f(x)$ будут, таким образом, числа $\frac{1}{3}$ и -2 и только они.

Следует еще раз подчеркнуть, что изложенные выше методы применимы только к многочленам с целыми коэффициентами и только для разыскания их рациональных корней.

§ 58*. Алгебраические числа

Всякий многочлен n-й степени с рациональными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел n корней, некоторые из которых (или даже все) могут лежать вне поля рациональных чисел. Однако не всякое комплексное или действительное число служит корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Те комплексные (в частности, действительные) числа, которые являются корнями таких многочленов, называются *алгебраическими* числами в противоположность числам *трансцендентным*. К числу алгебраических чисел принадлежат все рациональные числа, как корни многочленов первой степени с рациональными коэффициентами, а также всякий радикал вида $\sqrt[n]{a}$ с рациональным подкоренным числом a, как корень двучлена x^n-a. С другой стороны, в больших курсах математического анализа доказывается трансцендентность числа e — основания системы натуральных логарифмов, а также известного из элементарной геометрии числа π.

Если число α алгебраическое, то оно будет даже корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами и поэтому корнем

одного из неприводимых делителей этого многочлена также с целыми коэффициентами. *Тот неприводимый целочисленный многочлен, корнем которого является α, определен однозначно с точностью до постоянного множителя, т. е. вполне однозначно, если потребовать, чтобы коэффициенты этого многочлена были в совокупности взаимно просты* (т. е. чтобы многочлен был примитивным). В самом деле, если α служит корнем двух неприводимых многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то наибольший общий делитель этих многочленов будет отличен от единицы, а потому эти многочлены, ввиду их неприводимости, могут отличаться друг от друга лишь множителем нулевой степени.

Алгебраические числа, являющиеся корнями одного и того же неприводимого (над полем R) многочлена, называются *сопряженными* между собой[1]). Все множество алгебраических чисел распадается, следовательно, на непересекающиеся конечные классы сопряженных между собой чисел. Всякое рациональное число как корень многочлена первой степени не имеет сопряженных чисел, отличных от самого себя, и это свойство является для рациональных чисел характерным: всякое алгебраическое число, не являющееся рациональным, будет корнем неприводимого многочлена, степень которого больше единицы, и поэтому для него существуют сопряженные, отличные от него самого.

Множество всех алгебраических чисел является подполем поля комплексных чисел. Иными словами, *сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел сами будут алгебраическими числами.*

Пусть, в самом деле, даны алгебраические числа α и β. Обозначим через $\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все числа, сопряженные с α, через $\beta_1=\beta, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — числа, сопряженные с β, через $f(x)$ и $g(x)$ — неприводимые многочлены с рациональными коэффициентами, имеющие своими корнями соответственно α и β. Напишем многочлен, корнями которого служат всевозможные суммы $\alpha_i+\beta_j$; это будет

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i+\beta_j)].$$

Коэффициенты этого многочлена не будут, очевидно, меняться при перестановках всех α_i между собой, а также всех β_j между собой. Они являются, следовательно, на основании теоремы о многочленах, симметричных по двум системам неизвестных (см. конец § 53), многочленами от коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Иными словами, коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ оказываются рациональными числами, и поэтому число $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$, являющееся одним из его корней, будет алгебраическим.

---

[1]) Не следует смешивать этого понятия с сопряженностью комплексных чисел.

Таким же образом при помощи многочленов

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i-\beta_j)]$$

и

$$\chi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_i\beta_j)$$

доказывается алгебраичность чисел $\alpha-\beta$ и $\alpha\beta$.

Для доказательства алгебраичности частного достаточно показать, что если число α — алгебраическое и отличное от нуля, то α^{-1} также будет алгебраическим числом. Пусть α служит корнем многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n$$

с рациональными коэффициентами. Тогда, очевидно, многочлен

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +a_1x+a_0,$$

также с рациональными коэффициентами, будет иметь своим корнем число α^{-1}, что и требовалось доказать.

Из доказанной сейчас теоремы вытекает, что любая сумма рационального числа и радикала, например $1+\sqrt[3]{2}$, а также любая сумма радикалов, например $\sqrt{3}+\sqrt[7]{5}$, будут алгебраическими числами. Мы пока не можем, однако, утверждать алгебраичность чисел, записываемых в виде «двухэтажных» радикалов, например числа $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Это будет вытекать лишь из следующей теоремы:

Если число ω служит корнем многочлена

$$\varphi(x)=x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\ \ldots\ +\lambda x+\mu,$$

коэффициенты которого — алгебраические числа, то ω также будет алгебраическим числом.

Пусть α_i, β_j, ..., λ_s, μ_t пробегают числа, сопряженные соответственно с α, β, ..., λ, μ, причем $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, ..., $\lambda_1=\lambda$, $\mu_1=\mu$. Рассмотрим всевозможные многочлены вида

$$\varphi_{i,\,j,\,\ldots,\,s,\,t}(x)=x^n+\alpha_ix^{n-1}+\beta_jx^{n-2}+\ \ldots\ +\lambda_sx+\mu_t,$$

так что $\varphi_{1,\,1,\,\ldots,\,1,\,1}(x)=\varphi(x)$, и возьмем произведение всех этих многочленов

$$F(x)=\prod_{i,\,j,\,\ldots,\,s,\,t}\varphi_{i,\,j,\,\ldots,\,s,\,t}(x).$$

Коэффициенты многочлена $F(x)$ симметричны, очевидно, по каждой из систем α_i, β_j, ..., λ_s, μ_t, а поэтому (снова по теореме из § 53) они суть многочлены от коэффициентов тех неприводимых многочленов (с рациональными коэффициентами), корнями которых

служат соответственно α, β, ..., λ, μ, т. е. сами суть рациональные числа. Число ω, являясь корнем для $\varphi(x)$, будет, следовательно, корнем многочлена $F(x)$ с рациональными коэффициентами, т. е. будет алгебраическим числом.

Применим эту теорему к числу $\omega=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Число $\alpha=1+\sqrt{2}$ алгебраично по предыдущей теореме и поэтому число ω является корнем многочлена $x^2-\alpha$ с алгебраическими коэффициентами, т. е. само алгебраично. Вообще, применяя несколько раз обе доказанные сейчас теоремы, читатель без труда придет к следующему результату:

Всякое число, записываемое в радикалах над полем рациональных чисел (т. е. выражающееся через сколь угодно сложную комбинацию радикалов, в общем случае «многоэтажных»), будет алгебраическим числом.

Алгебраические числа, записываемые в радикалах, составляют, очевидно, поле. Следует помнить, однако, что это поле, как вытекает из замечания, сделанного (без доказательства) в конце § 38, будет лишь частью поля всех алгебраических чисел.

Выше была отмечена трансцендентность двух чисел: e и π. На самом деле, однако, трансцендентных чисел бесконечно много. Больше того, используя понятия и методы, относящиеся к теории множеств, мы покажем, что трансцендентных чисел, так сказать, даже больше, чем чисел алгебраических; точный смысл этого выражения станет ясен ниже.

Бесконечное множество M называется *счетным*, если оно может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел, т. е. если его элементы могут быть пронумерованы при помощи всех натуральных чисел, и *несчетным* — в противоположном случае.

Лемма 1. *Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество.*

В самом деле, возьмем в M произвольный элемент a_1. Выберем затем элемент a_2, отличный от a_1. Вообще, пусть в M уже выбрано n различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Так как множество M, будучи бесконечным, не может исчерпываться этими элементами, то можно указать отличный от них элемент a_{n+1}. Продолжая этот процесс, мы найдем в M бесконечное подмножество, составленное из элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots;$$

счетность этого подмножества очевидна.

Лемма 2. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества A само счетно.*

Множество A, ввиду его счетности, можно записать в виде

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

Пусть a_{k_1} будет первый элемент последовательности (1), принадлежащий к B, a_{k_2} — второй элемент с этим же свойством и т. д. Полагая $a_{k_n}=b_n$, $n=1, 2, \ldots$, мы получаем, что элементы подмножества B составляют последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

т. е. это подмножество счетное.

Лемма 3. *Объединение счетного множества конечных множеств, попарно не имеющих общих элементов, есть счетное множество.*

Пусть, в самом деле, даны конечные множества

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

и пусть их объединение будет B. Мы пронумеруем, очевидно, все элементы множества B, если произвольным образом пронумеруем элементы конечного множества A_1, затем продолжим эту нумерацию, перейдя к элементам множества A_2, и т. д.

Лемма 4. *Объединение двух счетных множеств, не имеющих общих элементов, есть счетное множество.*

Пусть даны счетные множества A с элементами

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и B с элементами

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

и пусть объединение этих множеств будет C. Если мы положим

$$a_n = c_{2n-1}, \quad b_n = c_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то все элементы множества C будут представлены в виде последовательности

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}, c_{2n}, \ldots,$$

что и доказывает счетность этого множества.

Докажем теперь следующую теорему:

Множество всех алгебраических чисел счетно.

Докажем предварительно *счетность множества всех многочленов от одного неизвестного с целыми коэффициентами.* Если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

—такой многочлен, притом отличный от нуля, то назовем *высотой* этого многочлена натуральное число

$$h_f = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Очевидно, что существует лишь конечное число целочисленных многочленов с данной высотой h; обозначим это множество через M_h. Кроме того, через M_0 обозначим множество, состоящее из одного нуля. Множество всех целочисленных многочленов будет объединением счетного множества конечных множеств $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_h, \ldots$, т. е., по лемме 3, оно счетно.

Отсюда, по лемме 2, вытекает, что *множество всех целочисленных примитивных неприводимых многочленов также счетно.* Мы знаем, вместе с тем, что всякое алгебраическое число является корнем одного и только одного целочисленного примитивного неприводимого многочлена. Собирая, следовательно, корни всех таких многочленов, т. е. беря объединение счетного множества конечных множеств, мы получим множество всех алгебраических чисел; это множество будет, таким образом, ввиду леммы 3, счетным.

Докажем, наконец, теорему:

Множество всех трансцендентных чисел несчетно.

Рассмотрим сначала множество F всех действительных чисел x, расположенных между нулем и единицей, $0 < x < 1$, и докажем, что *это множество несчетно.* Известно, что каждое из указанных чисел x можно записать в виде правильной бесконечной десятичной дроби

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

и что эта запись однозначна, если не допускать дробей, у которых для всех n, начиная с некоторого $n = N$, все $\alpha_n = 9$; обратно, всякая дробь указанного

вида равна некоторому числу x из множества F. Предположим теперь, что множество F счетно, т. е. что все числа x можно записать в виде последовательности

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots \tag{2}$$

Пусть

$$x_k = 0,\ \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ \ldots\ \alpha_{kn}\ \ldots$$

будет запись числа x_k в виде бесконечной десятичной дроби. Напишем теперь бесконечную десятичную дробь

$$0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots, \tag{3}$$

полагая β_1 отличным от первого десятичного знака дроби x_1, т. е. $\beta_1 \neq \alpha_{11}$, β_2 — отличным от второго десятичного знака дроби x_2, т. е. $\beta_2 \neq \alpha_{22}$, и, вообще, $\beta_n \neq \alpha_{nn}$. Положим, кроме того, что среди цифр β_n бесконечно много отличных от цифры 9. Ясно, что существует дробь (3), удовлетворяющая всем этим требованиям. Она является, следовательно, числом из множества F, но, по самому построению, отлична от всех чисел последовательности (2). Это противоречие доказывает несчетность множества F.

Отсюда следует *несчетность множества всех комплексных чисел:* если бы оно было счетным, то, ввиду леммы 2, оно не могло бы содержать несчетного подмножества F. Несчетность множества всех трансцендентных чисел теперь, ввиду леммы 4, очевидна, так как объединение этого множества со счетным множеством всех алгебраических чисел является множеством всех комплексных чисел, т. е. несчетно.

Доказанные нами две теоремы показывают, ввиду леммы 1, что множество трансцендентных чисел на самом деле является много более богатым элементами, т. е. более «мощным», чем множество алгебраических чисел