ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ

§ 59. Эквивалентность λ-матриц

Мы еще раз возвращаемся к вопросам, относящимся к линейной алгебре. Читатель уже при изучении гл. 7 убедился в том, какую важную роль играет понятие подобия матриц. Именно, две квадратные матрицы порядка n подобны тогда и только тогда, если они задают (в разных базах) одно и то же линейное преобразование n-мерного линейного пространства. Мы пока не умеем, однако, отвечать на вопрос, подобны ли две данные конкретные матрицы или нет. С другой стороны, мы пока не умеем находить среди всех матриц, подобных данной матрице A, матрицу, имеющую в том или ином смысле простейший вид, и даже вопрос об условиях, при которых матрица A подобна диагональной матрице, был рассмотрен в § 33 лишь в одном частном случае. Именно эти вопросы будут рассматриваться в настоящей главе, причем сразу для случая произвольного основного поля P.

Займемся сначала изучением квадратных матриц порядка n, элементами которых служат многочлены произвольных степеней от одного неизвестного λ с коэффициентами из поля P. Такие матрицы называются *многочленными матрицами, полиномиальными матрицами* или, короче, *λ-матрицами*. Примером λ-матрицы служит характеристическая матрица $A-\lambda E$ произвольной квадратной матрицы A с элементами из поля P; на главной диагонали этой матрицы стоят многочлены первой степени, вне главной диагонали — многочлены нулевой степени или нули. Всякая матрица с элементами из поля P — такие матрицы для краткости будем называть *числовыми матрицами* — также будет частным случаем λ-матрицы: ее элементы являются многочленами нулевой степени или нулями.

Пусть дана λ-матрица

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Назовем *элементарными преобразованиями* этой матрицы преобразования следующих четырех типов:

1) умножение любой строки матрицы $A(\lambda)$ на любое число α из поля P, отличное от нуля;

2) умножение любого столбца матрицы $A(\lambda)$ на любое число α из поля P, отличное от нуля;

3) прибавление к любой i-й строке матрицы $A(\lambda)$ любой ее j-й строки, $j \neq i$, притом умноженной на любой многочлен $\varphi(\lambda)$ из кольца $P[\lambda]$;

4) прибавление к любому i-му столбцу матрицы $A(\lambda)$ любого ее j-го столбца, $j \neq i$, притом умноженного на любой многочлен $\varphi(\lambda)$ из кольца $P[\lambda]$.

Легко видеть, что *для каждого из элементарных преобразований λ-матрицы существует обратное преобразование, также являющееся элементарным.* Так, обратным для преобразования 1) будет элементарное преобразование, состоящее в умножении той же строки на число α^{-1}, существующее ввиду условия $\alpha \neq 0$; обратным для преобразования 3) будет преобразование, состоящее в прибавлении к i-й строке j-й строки, умноженной на $-\varphi(\lambda)$.

В матрице $A(\lambda)$ можно при помощи нескольких элементарных преобразований переставить любые две строки или любые два столбца.

Пусть, например, нужно переставить i-ю и j-ю строки матрицы $A(\lambda)$. Это можно сделать при помощи четырех элементарных преобразований, как показывает следующая схема:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

Здесь последовательно выполнялись такие преобразования: а) к i-й строке прибавлялась j-я; б) из j-й строки вычиталась новая i-я; в) к новой i-й строке прибавлялась новая j-я; г) новая j-я строка умножалась на -1.

Будем говорить, что λ-матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ *эквивалентны* и записывать это символом $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, если от матрицы $A(\lambda)$ можно перейти к матрице $B(\lambda)$ при помощи конечного числа элементарных преобразований. Это отношение эквивалентности является, очевидно, рефлексивным и транзитивным, а также и симметричным ввиду существования для каждого элементарного преобразования обратного элементарного преобразования. Иными словами, *все квадратные λ-матрицы порядка n над полем P распадаются на непересекающиеся классы эквивалентных матриц.*

Нашей ближайшей целью является разыскание среди всех λ-матриц, эквивалентных данной матрице $A(\lambda)$, матрицы по возможности простого вида. Для этого введем следующее понятие. *Канонической λ-матрицей* называется λ-матрица, обладающая следующими тремя свойствами:

а) эта матрица диагональная, т. е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}; \tag{1}$$

б) всякий многочлен $e_i(\lambda)$, $i=2, 3, \ldots, n$, нацело делится на многочлен $e_{i-1}(\lambda)$;

в) старший коэффициент каждого многочлена $e_i(\lambda)$, $i=1, 2, \ldots, n$, равен единице, если этот многочлен отличен от нуля.

Заметим, что если среди многочленов $e_i(\lambda)$, стоящих на главной диагонали канонической λ-матрицы (1), встречаются равные нулю, то, ввиду свойства б), они непременно занимают на главной диагонали последние места. С другой стороны, если среди многочленов $e_i(\lambda)$ встречаются многочлены нулевой степени, то, по свойству в), все они равны 1 и, по свойству б), занимают на главной диагонали матрицы (1) первые места.

К числу канонических λ-матриц принадлежат, в частности, некоторые числовые матрицы, в том числе матрицы единичная и нулевая.

Всякая λ-матрица эквивалентна некоторой канонической λ-матрице, т. е., иными словами, она приводится элементарными преобразованиями к каноническому виду.

Будем доказывать эту теорему индукцией по порядку n рассматриваемых λ-матриц. Действительно, при $n=1$ будет

$$A(\lambda)=(a(\lambda)).$$

Если $a(\lambda)=0$, то наша матрица уже каноническая. Если же $a(\lambda)\neq 0$, то достаточно разделить многочлен $a(\lambda)$ на его старший коэффициент — это будет элементарное преобразование матрицы — и мы получим каноническую матрицу.

Пусть теорема уже доказана для λ-матриц порядка $n-1$. Рассмотрим произвольную λ-матрицу $A(\lambda)$ порядка n. Если она нулевая, то уже является канонической и доказывать нечего. Будем считать поэтому, что среди элементов матрицы $A(\lambda)$ имеются ненулевые.

Переставляя, если понадобится, строки и столбцы матрицы $A(\lambda)$, можно перевести один из ненулевых элементов в левый верхний угол. Таким образом, среди λ-матриц, эквивалентных матрице $A(\lambda)$, имеются такие, в левом верхнем углу которых стоит ненулевой многочлен. Рассмотрим все такие матрицы. Многочлены, стоящие в левом верхнем углу этих матриц, могут иметь разные степени. Степень многочлена является, однако, натуральным числом, а во всяком непустом множестве натуральных чисел существует наимень-

шее число. Можно найти, следовательно, среди всех λ-матриц, эквивалентных матрице $A(\lambda)$ и имеющих ненулевой элемент в левом верхнем углу, одну из таких, что многочлен, стоящий в ее левом верхнем углу, имеет наименьшую возможную степень. Деля, наконец, первую строку этой матрицы на старший коэффициент указанного многочлена, мы получим такую λ-матрицу, эквивалентную матрице $A(\lambda)$,

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) \ldots b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) \ldots b_{2n}(\lambda) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) \ldots b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

что $e_1(\lambda) \neq 0$, старший коэффициент этого многочлена равен 1 и никакой комбинацией элементарных преобразований нельзя перейти от полученной матрицы к такой матрице, в левом верхнем углу которой стоял бы ненулевой многочлен меньшей степени.

Докажем, что *все элементы первой строки и первого столбца полученной матрицы нацело делятся на* $e_1(\lambda)$. Пусть, например, для $2 \leqslant j \leqslant n$

$$b_{1j}(\lambda) = e_1(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda),$$

где степень $r(\lambda)$ меньше степени $e_1(\lambda)$, если $r(\lambda)$ отлично от нуля. Тогда, вычитая из j-го столбца нашей матрицы ее первый столбец, умноженный на $q(\lambda)$, а затем переставляя первый и j-й столбцы, мы придем к такой матрице, эквивалентной матрице $A(\lambda)$, в левом верхнем углу которой стоит многочлен $r(\lambda)$, т. е. многочлен меньшей степени, чем $e_1(\lambda)$, что противоречит выбору этого многочлена. Отсюда следует $r(\lambda) = 0$, что и требовалось доказать.

Вычитая теперь из j-го столбца нашей матрицы ее первый столбец, умноженный на $q(\lambda)$, мы заменим элемент $b_{1j}(\lambda)$ нулем. Делая такие преобразования для $j = 2, 3, \ldots, n$, мы заменим нулями все элементы $b_{1j}(\lambda)$. Аналогичным путем заменяются нулями и все элементы $b_{i1}(\lambda)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. *Мы придем, следовательно, к такой матрице, эквивалентной матрице* $A(\lambda)$, *в левом верхнем углу которой стоит многочлен* $e_1(\lambda)$, *а все остальные элементы первой строки и первого столбца равны нулю,*

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \ldots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \ldots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

По индуктивному предположению, матрица $(n-1)$-го порядка, стоящая в правом нижнем углу полученной нами матрицы (2),

элементарными преобразованиями приводится к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_2(\lambda) & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Совершив эти же преобразования над соответствующими строками и столбцами матрицы (2) — при этом первая строка и первый столбец этой матрицы останутся, очевидно, без изменения, — мы получим, что

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для доказательства того, что матрица (3) является канонической, остается показать, что $e_2(\lambda)$ нацело делится на $e_1(\lambda)$. Пусть

$$e_2(\lambda) = e_1(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda),$$

где $r(\lambda) \neq 0$ и степень $r(\lambda)$ меньше степени $e_1(\lambda)$. Прибавляя, однако, ко второму столбцу матрицы (3) ее первый столбец, умноженный на $q(\lambda)$, а затем вычитая из второй строки первую строку, мы заменим элемент $e_2(\lambda)$ элементом $r(\lambda)$. Переставляя, далее, первые две строки и первые два столбца, мы переместим многочлен $r(\lambda)$ в левый верхний угол матрицы, что противоречит, однако, выбору многочлена $e_1(\lambda)$.

Теорема о приведении λ-матрицы к каноническому виду доказана. Эта теорема должна быть дополнена следующей теоремой единственности:

Всякая λ-матрица эквивалентна лишь одной канонической матрице.

В самом деле, пусть дана произвольная λ-матрица $A(\lambda)$ порядка n. Фиксируем некоторое натуральное число k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и рассмотрим все миноры k-го порядка матрицы $A(\lambda)$. Вычисляя эти миноры, мы получим конечную систему многочленов от λ; наибольший общий делитель этой системы многочленов, взятый со старшим коэффициентом 1, обозначим через $d_k(\lambda)$.

Мы имеем, следовательно, многочлены

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \dots,\ d_n(\lambda), \tag{4}$$

однозначно определяемые самой матрицей $A(\lambda)$. При этом $d_1(\lambda)$ есть наибольший общий делитель всех элементов матрицы $A(\lambda)$, взятый с коэффициентом 1, а $d_n(\lambda)$ равен определителю матрицы $A(\lambda)$, деленному на его старший коэффициент. Заметим также, что если матрица $A(\lambda)$ имеет ранг r, то

$$d_{r+1}(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 0,$$

в то время как все остальные многочлены системы (4) отличны от нуля.

Наибольший общий делитель $d_k(\lambda)$ всех миноров k-го порядка λ-матрицы $A(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots, n$, не меняется при выполнении в матрице $A(\lambda)$ элементарных преобразований.

Это утверждение почти очевидно для того случая, когда в матрице $A(\lambda)$ выполняется элементарное преобразование типа 1) или 2). Так, например, если i-я строка матрицы умножается на число α из поля P, $\alpha \neq 0$, то те миноры k-го порядка, через которые i-я строка проходит, будут умножаться на α; все же остальные миноры k-го порядка останутся без изменения. Однако при разыскании наибольшего общего делителя нескольких многочленов любые из этих многочленов можно беспрепятственно умножать на отличные от нуля числа из поля P.

Рассмотрим теперь элементарные преобразования типа 3) или 4). Пусть, например, к i-й строке матрицы $A(\lambda)$ прибавляется ее j-я строка, $j \neq i$, умноженная на многочлен $\varphi(\lambda)$; получающуюся после этого преобразования матрицу обозначим через $\overline{A}(\lambda)$, а наибольший общий делитель всех ее миноров k-го порядка, взятый со старшим коэффициентом 1, — через $\overline{d}_k(\lambda)$. Посмотрим, что происходит при указанном преобразовании с минорами k-го порядка матрицы $A(\lambda)$.

Ясно, что не будут меняться те миноры, через которые i-я строка не проходит. Не меняются и те миноры, через которые проходят как i-я, так и j-я строки, так как определитель не меняется от прибавления к одной его строке кратного другой его строки. Возьмем, наконец, любой из тех миноров k-го порядка, через которые проходит i-я строка, но не проходит j-я; обозначим его через M. Соответствующий минор матрицы $\overline{A}(\lambda)$ можно представить, очевидно, как сумму минора M и умноженного на $\varphi(\lambda)$ минора M' матрицы $A(\lambda)$, получающегося из минора M заменой элементов i-й строки матрицы $A(\lambda)$ соответствующими элементами ее j-й строки. Так как и M, и M' делятся на $d_k(\lambda)$, то и $M+\varphi(\lambda)M'$ будет делиться на $d_k(\lambda)$.

Из сказанного следует, что все миноры k-го порядка матрицы $\overline{A}(\lambda)$ нацело делятся на $d_k(\lambda)$, а поэтому и $\overline{d}_k(\lambda)$ делится на $d_k(\lambda)$. Так как, однако, для рассматриваемого элементарного преобразования существует обратное элементарное преобразование того же типа, то и $d_k(\lambda)$ делится на $\overline{d}_k(\lambda)$. Если же учесть, что старшие коэффициенты обоих этих многочленов равны 1, то $\overline{d}_k(\lambda)=d_k(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, *всем λ-матрицам, эквивалентным матрице $A(\lambda)$, соответствует один и тот же набор многочленов* (4). Это относится, в частности, к любой (если их несколько) канонической матрице, эквивалентной $A(\lambda)$. Пусть (3) будет одна из таких матриц.

Вычислим многочлен $d_k(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots, n$, пользуясь матрицей (3). Ясно, что минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, равен произведению

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_k(\lambda). \tag{5}$$

Если, далее, мы берем в матрице (3) минор k-го порядка, стоящий в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, и в столбцах с теми же самыми номерами, то этот минор равен произведению $e_{i_1}(\lambda)\, e_{i_2}(\lambda) \ldots e_{i_k}(\lambda)$, которое делится на (5). Действительно, $1 \leqslant i_1$ и поэтому $e_{i_1}(\lambda)$ делится на $e_1(\lambda)$, $2 \leqslant i_2$, и поэтому $e_{i_2}(\lambda)$ делится на $e_2(\lambda)$ и т. д. Наконец, если в матрице (3) взят минор k-го порядка, через который хотя бы для одного i проходит i-я строка этой матрицы, но не проходит ее i-й столбец, то этот минор содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Из сказанного следует, что произведение (5) и будет наибольшим общим делителем всех миноров k-го порядка матрицы (3), а поэтому и исходной матрицы $A(\lambda)$,

$$d_k(\lambda) = e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_k(\lambda), \qquad k=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Теперь легко показать, что *многочлены* $e_k(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots, n$, *однозначным образом определяются самой матрицей* $A(\lambda)$. Пусть ранг этой матрицы равен r. Тогда, как мы знаем, $d_r(\lambda) \neq 0$, но $d_{r+1}(\lambda) = 0$, а поэтому, ввиду (6), $e_{r+1}(\lambda) = 0$. Отсюда, ввиду свойств канонической матрицы, вообще следует, что если ранг r матрицы $A(\lambda)$ меньше n, то

$$e_{r+1}(\lambda) = e_{r+2}(\lambda) = \ldots = e_n(\lambda) = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, для $k \leqslant r$ из (6) следует, ввиду $d_{k-1}(\lambda) \neq 0$, что

$$e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}. \tag{8}$$

Этим заканчивается доказательство единственности канонического вида λ-матрицы. Одновременно мы получили способ непосредственного разыскания многочленов $e_k(\lambda)$, называемых *инвариантными множителями* матрицы $A(\lambda)$.

Пример. Привести к каноническому виду λ-матрицу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Выполняя цепочку элементарных преобразований, получаем:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda^2+5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, можно было бы непосредственно вычислить инвариантные множители матрицы $A(\lambda)$. Именно, вычисляя наибольший общий делитель элементов этой матрицы, получаем:

$$d_1(\lambda)=e_1(\lambda)=\lambda.$$

Вычисляя же определитель матрицы $A(\lambda)$ и замечая, что его старший коэффициент равен 1, получаем:

$$d_2(\lambda)=\lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2,$$

а поэтому

$$e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda.$$

§ 60. Унимодулярные λ-матрицы. Связь подобия числовых матриц с эквивалентностью их характеристических матриц

Из результатов предшествующего параграфа вытекает один критерий эквивалентности λ-матриц, которому можно придать следующие две почти тождественные формулировки:

Две λ-матрицы тогда и только тогда эквивалентны, если они приводятся к одному и тому же каноническому виду.

Две λ-матрицы тогда и только тогда эквивалентны, если они обладают одинаковыми инвариантными множителями.

Выведем еще один критерий, имеющий уже иной характер.

Мы знаем, что к числу канонических λ-матриц принадлежит единичная матрица E. Назовем λ-матрицу $U(\lambda)$ *унимодулярной*, если она имеет матрицу E своим каноническим видом, т. е. если все ее инвариантные множители равны единице.

λ-матрица $U(\lambda)$ тогда и только тогда унимодулярна, если ее определитель отличен от нуля, но не зависит от λ, т. е. является отличным от нуля числом из основного поля P.

Действительно, если $U(\lambda)\sim E$, то этим двум матрицам соответствует один и тот же многочлен $d_n(\lambda)$. Однако для единичной матрицы $d_n(\lambda)=1$. Отсюда следует, что определитель матрицы $U(\lambda)$, отличающийся от $d_n(\lambda)$ лишь отличным от нуля числовым множителем, будет отличным от нуля числом из поля P. Обратно, если определитель матрицы $U(\lambda)$ отличен от нуля и не зависит от λ, то для этой матрицы многочлен $d_n(\lambda)$ будет равен 1, а поэтому, по (6) из предыдущего параграфа, все инвариантные множители $e_i(\lambda)$ матрицы $U(\lambda)$, $i=1, 2, \ldots, n$, равны единице.

Отсюда следует, что *всякая невырожденная числовая матрица является унимодулярной λ-матрицей.* Унимодулярная λ-матрица может иметь, однако, очень сложный вид. Так, λ-матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix}$$

унимодулярна, так как ее определитель равен 20, т. е. отличен от нуля и от λ не зависит.