ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование студента-математика начинается с изучения трех основных дисциплин, а именно математического анализа, аналитической геометрии и высшей алгебры. Эти дисциплины имеют ряд точек соприкосновения, а местами и перекрытий, и вместе составляют фундамент, на котором строится все здание современной математической науки.

Высшая алгебра, изложению которой посвящена настоящая книга, представляет собой далеко идущее, но вполне естественное обобщение основного содержания школьного курса элементарной алгебры. Центральным в школьном курсе алгебры является, бесспорно, вопрос о решении уравнений. Как читатель помнит, изучение уравнений начинается с очень простого случая одного уравнения первой степени с одним неизвестным, а затем развивается в двух направлениях. С одной стороны, рассматриваются системы двух и трех уравнений первой степени с двумя и, соответственно, тремя неизвестными; с другой стороны, изучается одно квадратное уравнение с одним неизвестным, а также некоторые частные типы уравнений более высокой степени, легко сводящиеся к квадратным (биквадратные уравнения, например).

Эти оба направления получают дальнейшее развитие в курсе высшей алгебры, определяя ее разбиение на два больших отдела. Один из них, а именно основы линейной алгебры, имеет исходной задачей изучение произвольных систем уравнений первой степени или, как говорят, линейных уравнений. Для решения таких систем в том случае, когда число уравнений равно числу неизвестных, разрабатывается аппарат теории определителей. Этого аппарата уже недостаточно, однако, для изучения таких систем линейных уравнений, у которых число уравнений не равно числу неизвестных, — случай, непривычный с точки зрения элементарной алгебры, но очень важный для приложений. Оказалось необходимым, в частности, разрабатывать теорию матриц, т. е. систем чисел, расположенных в квадратные или прямоугольные таблицы из нескольких строк и столбцов. Эта теория оказалась очень глубокой и нашла приложения далеко за пределами теории систем линейных уравнений. С другой стороны, изучение систем линейных уравнений потребовало введения и изучения многомерных (так называемых векторных или линейных)

пространств. У людей, далеких от математики, с многомерным (в первую очередь с четырехмерным) пространством связываются туманные и часто ошибочные представления; в действительности же это понятие является чисто математическим, даже в основном алгебраическим, и служит важным орудием во многих математических исследованиях, а также в физике и механике.

Вторая половина курса высшей алгебры, называемая алгеброй многочленов, посвящена изучению одного уравнения от одного неизвестного, но уже произвольной степени. Учитывая существование формулы для решения квадратных уравнений, естественно было искать аналогичные формулы для уравнений более высоких степеней. Исторически этот отдел алгебры так и развивался, причем формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени были найдены еще в XVI веке. После этого начались безуспешные поиски формул, которые выражали бы корни уравнений пятой и более высоких степеней через коэффициенты этих уравнений при помощи радикалов, быть может и очень многоэтажных. Эти поиски продолжались до начала XIX века, когда было, наконец, доказано, что такие формулы не могут быть найдены и что для всех степеней, начиная с пятой, существуют даже конкретные примеры уравнений с целочисленными коэффициентами, корни которых не могут быть записаны при помощи радикалов.

Отсутствие формул для решения уравнений высоких степеней не следует считать очень печальным обстоятельством — даже в случае уравнений третьей и четвертой степени, где такие формулы существуют, они очень громоздки и практически почти бесполезны. С другой стороны, коэффициенты тех уравнений, которые приходится решать физикам или инженерам, являются обычно величинами, полученными в результате измерений, т. е. известны лишь приближенно, а поэтому и корни нужно знать лишь приближенно, с заданной точностью. Это привело к разработке различных методов приближенного решения уравнений, лишь простейшие из которых излагаются в курсе высшей алгебры.

Центральным в алгебре многочленов оказывается, однако, не вопрос о практическом разыскании корней уравнений, а вопрос об их существовании. Известно, что существуют даже квадратные уравнения с действительными коэффициентами, не имеющие действительных корней. Пополняя запас чисел до совокупности всех комплексных чисел, мы обнаруживаем, что квадратные уравнения уже корнями обладают и что это же справедливо и для уравнений третьей и четвертой степени, как вытекает из существования формул для их решения. Не найдется ли, однако, такое уравнение пятой или более высокой степени, которое не имеет ни одного корня даже среди комплексных чисел, и не придется ли для разыскания корней подобных уравнений переходить от комплексных чисел к более широкому запасу чисел? Ответ на этот вопрос дает важная теорема, утвер-

ждающая, что всякое уравнение с любыми числовыми коэффициентами, не только действительными, но и комплексными, имеет комплексные (быть может, в частности, действительные) корни, причем корней этих, вообще говоря, даже столько, какова степень уравнения.

Таков краткий обзор основного содержания курса высшей алгебры. Следует подчеркнуть, что высшая алгебра является лишь началом большой алгебраической науки, очень разветвленной, богатой содержанием и постоянно развивающейся. Попытаемся дать обзор, еще более беглый, тех ветвей алгебры, которые в основном лежат за пределами курса высшей алгебры.

Линейная алгебра, являющаяся большой наукой, посвященной в основном теории матриц и связанной с нею теории линейных преобразований векторных пространств, включает в себя также теорию форм, теорию инвариантов и тензорную алгебру, играющую важную роль в дифференциальной геометрии. Теория векторных пространств получает дальнейшее развитие вне алгебры, в функциональном анализе (бесконечномерные пространства). По разнообразию и значительности приложений как в математике, так и в механике, физике и технических науках линейная алгебра остается пока первой среди многочисленных ветвей алгебры.

Алгебра многочленов, развивавшаяся на протяжении многих десятилетий как наука об одном уравнении произвольной степени от одного неизвестного, теперь уже в основном закончена. Дальнейшее развитие она частично получила в некоторых разделах теории функций комплексного переменного, в основном же переросла в теорию полей, о которой скажем ниже. Что же касается очень трудного вопроса о системах уравнений от нескольких неизвестных, но не линейных, а произвольных степеней, — этот вопрос, объединяющий оба направления, разрабатываемые в курсе высшей алгебры, в самом этом курсе почти не затрагивается, — то он по существу относится к особой ветви математики, называемой алгебраической геометрией.

Исчерпывающее решение вопроса об условиях, при которых уравнение может быть решено в радикалах, было дано французским математиком Галуа (1811 — 1832). Его исследования указали новые направления в развитии алгебры, что привело уже в XX веке, после работ немецкой женщины-алгебраиста Э. Нётер (1882 — 1935), к оформлению новой точки зрения на задачи алгебраической науки. Сейчас бесспорно, что вовсе не изучение уравнений является центральной задачей алгебры. Истинным объектом алгебраического исследования следует считать алгебраические операции, подобные сложению или умножению чисел, но производимые, возможно, не над числами.

Уже школьнику приходится встречаться в курсе физики с операцией сложения сил. Математические дисциплины, изучаемые на первых курсах университетов и педагогических институтов, приносят многочисленные примеры алгебраических операций — сложение и умножение

матриц, функций, операции над преобразованиями пространства, над векторами и т. д. Эти операции обычно похожи на операции над числами и носят те же названия, но иногда некоторые свойства, привычные в случае чисел, оказываются утерянными. Так, очень часто и в очень важных случаях операции оказываются некоммутативными (произведение зависит от порядка сомножителей), а иногда и неассоциативными (произведение трех множителей зависит от расстановки скобок).

Наиболее систематическому изучению подвергаются немногие, наиболее важные типы алгебраических систем, т. е. множеств, составленных из элементов какой-либо природы, для которых определены некоторые алгебраические операции. Таковы, в частности, поля. Это будут алгебраические системы, в которых, подобно системе действительных и системе комплексных чисел, определены операции сложения и умножения, обе коммутативные и ассоциативные, связанные законом дистрибутивности (т. е. справедливо обычное правило раскрытия скобок) и обладающие обратными операциями — вычитанием и делением. Теория полей оказалась естественной областью для дальнейшего развития теории уравнений, а ее основные ветви — теория полей алгебраических чисел и теория полей алгебраических функций — связали ее соответственно с теорией чисел и теорией функций комплексного переменного. Курс высшей алгебры включает в себя элементарное введение в теорию полей, а некоторые разделы курса — многочлены от нескольких неизвестных, нормальная форма матрицы—излагаются сразу для случая произвольного основного поля.

Более широким, чем понятие поля, является понятие кольца. В отличие от случая поля, здесь уже не требуется выполнимости деления и, кроме того, умножение может быть некоммутативным и даже неассоциативным. Простейшими примерами колец служат совокупность всех целых чисел (включая и отрицательные), система многочленов от одного неизвестного и система действительных функций действительного переменного. Теория колец включает в себя такие старые ветви алгебры, как теория гиперкомплексных систем и теория идеалов, она связана с рядом математических наук, в частности с функциональным анализом, и уже нашла некоторые выходы в физику. Курс высшей алгебры, по существу, содержит лишь определение понятия кольца.

Еще бо́льшую область применений имеет теория групп. Группой называется алгебраическая система с одной основной операцией, причем эта операция должна быть ассоциативной, хотя не обязательно коммутативной, и должна обладать обратной операцией — делением, если основная операция названа умножением. Такова, например, совокупность целых чисел, рассматриваемая относительно операции сложения, а также совокупность положительных действительных чисел, рассматриваемая с операцией умножения. Группы играли большую роль уже в теории Галуа, в вопросе о разрешимости уравнений в радикалах,

сейчас же они являются важным орудием в теории полей, во многих разделах геометрии, в топологии, а также и вне математики — в кристаллографии, в теоретической физике. Вообще, по широте области приложений теория групп занимает среди всех ветвей алгебры следующее после линейной алгебры место. Наш курс включает в себя главу, посвященную основам теории групп.

В самые последние десятилетия возникла и далеко развилась новая область алгебры — теория структур. Структурой называется алгебраическая система с двумя операциями — сложением и умножением. Эти операции должны быть коммутативными и ассоциативными, а также удовлетворять следующим требованиям: и сумма, и произведение элемента с самим собою должны равняться самому этому элементу; если сумма двух элементов равна одному из них, то произведение равно другому, и обратно. Примером структуры служит система натуральных чисел, рассматриваемая относительно операций взятия общего наименьшего кратного и общего наибольшего делителя. Теория структур имеет интересные связи с теорией групп и теорией колец, а также с теорией множеств; одна старая ветвь геометрии, а именно проективная геометрия, оказалась, по существу, частью теории структур; можно отметить также один выход теории структур в теорию электрических сетей.

Известный параллелизм, существующий между некоторыми частями теории групп, теории колец и теории структур, привел к возникновению общей теории алгебраических систем (или универсальных алгебр). Эта теория сделала пока лишь самые первые шаги, но контуры ее уже вырисовываются, а обнаружившиеся здесь связи с математической логикой позволяют рассчитывать на серьезное дальнейшее развитие.

Конечно, в изложенную выше схему далеко не укладывается все многообразное содержание алгебраической науки. Существует, в частности, ряд отделов алгебры, пограничных с другими разделами математики. Такова топологическая алгебра, изучающая алгебраические системы, в которых операции непрерывны относительно некоторой сходимости, определенной для элементов этих систем; примером служит система действительных чисел. К топологической алгебре близка теория непрерывных (или лиевых) групп, имеющая многочисленные приложения в различных вопросах геометрии, в теоретической физике, в гидродинамике. Впрочем, теория лиевых групп отличается таким переплетением алгебраических, топологических, геометрических и теоретико-функциональных методов, что было бы правильным считать ее особой ветвью математики. Существует, далее, теория упорядоченных алгебраических систем, возникшая в связи с исследованиями по основаниям геометрии и нашедшая приложения в функциональном анализе. Начинает развиваться, наконец, дифференциальная алгебра, устанавливающая новые связи между алгеброй и теорией дифференциальных уравнений.

Само собой разумеется, что то блестящее развитие алгебраической науки, которое привело к ее сегодняшнему состоянию, не было случайным — оно явилось частью общего развития математики и в значительной мере вызывалось необходимостью ответить на запросы, предъявляемые к алгебре со стороны других математических наук. С другой стороны, развитие алгебры само оказывало и оказывает очень большое влияние на развитие смежных ветвей науки, особенно усилившееся благодаря тому расширению области приложений, которое характерно для современной алгебры, и поэтому иногда говорят даже о происходящей сейчас «алгебраизации» математики.

Обзор алгебры, данный нами выше, не только является очень беглым, но и не дает представления об истории развития этой науки. Мы закончим поэтому наше введение очень кратким обзором истории алгебры.

Некоторыми вопросами алгебры, в частности решением простейших уравнений, занимались еще вавилонские, а затем древнегреческие математики. Вершиной алгебраических исследований этого периода являются сочинения греческого (александрийского) математика Диофанта (III век н. э.). В дальнейшем эти исследования развивались индийскими математиками — Ариабхата (VI век), Брамагупта (VII век), Бхаскара (XII век). Очень рано началась разработка вопросов алгебры в Китае — Чжан Цан (II век до н. э.), Цзин Чоу-чан (I век н. э.). Весьма крупным китайским алгебраистом был Цинь Цзю-шао (XIII век).

Большой вклад в развитие алгебры внесли математики средневекового востока, писавшие на арабском языке, в особенности уроженцы Средней Азии узбекский ученый Мухаммед Аль-Хорезми (IX век) и таджикский математик и поэт Омар Хайям (1040—1123). В частности, само слово «алгебра» возникло в связи с заглавием книги Аль-Хорезми «Аль-джебр аль-мукабала».

Упомянутые выше исследования вавилонских, греческих, индийских, китайских и среднеазиатских алгебраистов относились к тем вопросам алгебры, которые входят ныне в программу курса элементарной алгебры, и лишь иногда касались уравнений третьей степени. В этом же круге вопросов оставались в основном и исследования средневековых западноевропейских алгебраистов и алгебраистов эпохи Возрождения; назовем итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (XII век) и создателя современной алгебраической символики француза Вьета (1540 — 1603). Впрочем, выше уже отмечалось, что в XVI веке были найдены методы решения уравнений третьей и четвертой степени; здесь должны быть названы имена итальянцев Ферро (1465—1526), Тарталья (1500—1557), Кардано (1501 — 1576) и Феррари (1522 — 1565).

В XVII и XVIII веках происходила интенсивная разработка общей теории уравнений (т. е. алгебры многочленов), в которой принимали участие крупнейшие ученые того времени — француз Декарт (1596—1650), англичанин Ньютон (1643—1727), французы Даламбер

(1717—1783) и Лагранж (1736—1813). В XVIII веке началось также построение теории определителей — швейцарский математик Крамер (1704—1752), французский ученый Лаплас (1749—1827). На рубеже XVIII и XIX веков немецкий математик Гаусс (1777—1855) доказал упоминавшуюся выше основную теорему о существовании корней уравнений с числовыми коэффициентами.

Первая треть XIX века ознаменована в истории алгебры решением проблемы о разрешимости уравнений в радикалах. Доказательство невозможности найти формулы для решения уравнений, степень которых больше или равна пяти, было получено итальянским математиком Руффини (1765—1822) и в более строгой форме норвежским ученым Абелем (1802—1829). Как уже отмечалось выше, исчерпывающее решение вопроса об условиях, при которых уравнение допускает решение в радикалах, принадлежит Галуа.

Теория Галуа явилась толчком для широкого развития алгебры в середине и второй половине XIX века, в том числе и новых ее направлений. Так, появились теория полей алгебраических чисел и полей алгебраических функций и связанная с ней теория идеалов. Здесь нужно назвать немецких математиков Куммера (1810—1893), Кронекера (1823—1891) и Дедекинда (1831—1916) и русских математиков Е. И. Золотарева (1847—1878) и Г. Ф. Вороного (1868—1908). Большое развитие получила теория конечных групп, идущая еще от Лагранжа и Галуа; здесь работали французы Коши (1789—1857) и Жордан (1838—1922), норвежский математик Силов (1832—1918), немецкие алгебраисты Фробениус (1849—1918) и Гёльдер (1859—1937). Начало теории непрерывных групп положили исследования норвежского математика С. Ли (1842—1899).

Работами английского ученого Гамильтона (1805—1865) и немецкого математика Грасмана (1809—1877) началась теория гиперкомплексных систем или, как теперь говорят, теория алгебр. Большую роль в дальнейшем развитии этой ветви алгебры играли относящиеся к концу века работы русского математика Ф. Э. Молина (1861—1941).

Линейная алгебра достигла в XIX веке большого расцвета, прежде всего благодаря работам английских математиков Сильвестра (1814—1897) и Кэли (1821—1895). Продолжалась разработка и алгебры многочленов; мы отметим лишь метод приближенного решения уравнений, найденный русским геометром Н. И. Лобачевским (1792—1856), и работы немецкого математика Гурвица (1859—1919). Во второй половине века начала создаваться алгебраическая геометрия, в частности в работах немецкого математика М. Нётера (1844—1922).

В XX веке алгебраические исследования приобрели очень большую широту и алгебра, как мы уже знаем, заняла в математике весьма почетное место. В этот период возникают многие новые разделы алгебры, в том числе общая теория полей (десятые годы), теория колец и общая теория групп (двадцатые годы), топологическая

алгебра и теория структур (тридцатые годы); в сороковых и пятидесятых годах появились теория полугрупп и теория квазигрупп, теория универсальных алгебр, гомологическая алгебра, теория категорий. Во всех частях алгебры работают крупные ученые, внесшие серьезный вклад в науку, в ряде стран возникают большие алгебраические школы. Это относится, в частности, к Советскому Союзу.

Из числа русских дореволюционных алгебраистов, помимо названных выше, следует указать также С. О. Шатуновского (1859—1929) и Д. А. Граве (1863—1939). Однако настоящий расцвет алгебраических исследований в нашей стране начинается лишь после Великой Октябрьской революции. Эти исследования захватывают почти все разделы современной алгебраической науки, причем в некоторых из них работы советских алгебраистов играют руководящую роль. Мы назовем лишь два имени — Н. Г. Чеботарева (1894—1947), работавшего в теории полей и теории лиевых групп, и О. Ю. Шмидта (1891—1956), известного полярника и в то же время крупного алгебраиста, создателя советской теоретико-групповой школы.

Заканчивая наш краткий обзор современного состояния и путей развития алгебры, мы должны еще раз подчеркнуть, что рассмотренные здесь вопросы в основном лежат за пределами курса высшей алгебры. Задачей обзора было лишь помочь читателю получить правильное представление о месте, занимаемом курсом высшей алгебры в алгебраической науке в целом и во всем большом здании математики.