ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Координаты точки на плоскости. Расстояние между двумя точками.

На первых двух практических занятиях мы будем решать задачи, связанные с применением первоначальных формул аналитической геометрии на плоскости. Сюда относятся такие задачи:

1) определение расстояния между двумя точками на плоскости;

2) деление отрезка прямой в заданном отношении;

3) определение площади треугольника по координатам его вершин.

На этом и последующих практических занятиях по аналитической геометрии будут применяться только две системы координат прямоугольная система на плоскости и в пространстве и полярная.

Когда в условии задачи будет сказано «дана точка», то это значит, что координаты точки известны. Если же в задаче будет поставлено требование «найти точку», то это означает, что следует определить ее координаты.

Фраза «дан отрезок прямой» означает, что координаты концов этого отрезка известны. Если известны координаты концов отрезка прямой, то тем самым положение отрезка на плоскости вполне определено. Координаты точки записываются в скобках рядом с названием точки, причем *всегда на первом месте в прямоугольной системе координат записывается абсцисса точки, а на втором — ее ордината*. Например, если x_1 — абсцисса точки A, а y_1 — ее ордината, то это записывается так: $A(x_1, y_1)$.

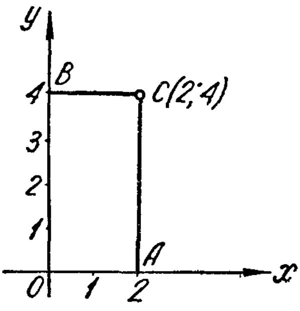
У точки, лежащей на оси абсцисс, ордината равна нулю; у точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю. Обе координаты начала координат равны нулю.

1. Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости определяется по формуле

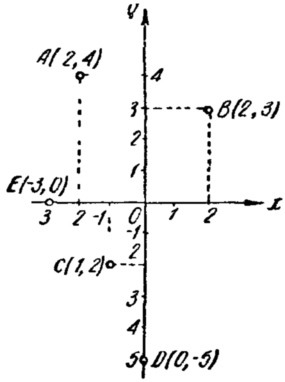
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1, 1)$$

Задача 1,1. Построить точку C (2, 4).

Решение. Абсцисса точки C равна 2, а ее ордината равна 4. Выберем единицу масштаба и возьмем на плоскости прямоугольную систему координат. Отложим на оси Ox вправо от начала координат O отрезок OA длиною в 2 ед. масштаба, а по оси Oy вверх от начала координат — отрезок OB длиною 4 ед. масштаба. Из точки A восстановим перпендикуляр к оси Ox, а из точки B — перпендикуляр к оси Oy. Пересечение этих перпендикуляров и определит искомую точку C (фиг. 1,1).



Фиг. 1,1.



Фиг. 1,2.

Задача 1,2 (для самостоятельного решения). Построить точки A (—2, 4); B (2, 3), C (—1, —2); D (0, —5), E (—3, 0) (фиг. 1,2).

Задача 1,3. Построить точку, симметричную точке A (x, y) относительно: а) оси Ox, б) оси Oy, в) начала координат.

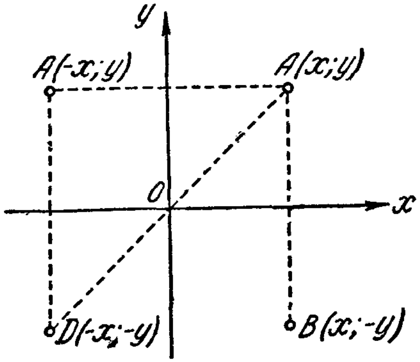
Решение. Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно прямой, если отрезок M_1M_2 перпендикулярен этой прямой, причем его средина лежит на этой прямой.

Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно точки O, если точка O является срединой отрезка M_1M_2 Эти определения следует иметь в виду при решении задач 1, 3 и 1, 4.

а) Точка B, симметричная с точкой A (x, y) относительно оси Ox, имеет абсциссу такую же, как и точка A, а ординату, равную по абсолютной величине ординате точки A, но противоположную ей по знаку. Значит, точка B имеет координаты x и $—y$: B (x,—y) (фиг. 1, 3).

б) Точка C, симметричная с точкой A (x, y) относительно оси Oy, будет иметь ординату такую же, как и точка A, а абсцисса точки C будет по абсолютной величине равна абсциссе точки A, но противоположна ей по знаку. Значит, точка C имеет координаты $-x$ и y: $C(-x, y)$ (фиг. 1,3).

в) Точка D, симметричная точке $A(x, y)$ относительно начала координат, будет иметь абсциссу и ординату, равные по абсолютной величине абсциссе и ординате точки A, но противоположные им по знаку, т. е. координаты точки D будут равны $-x$ и $-y$: $D(-x, -y)$ (фиг. 1,3).

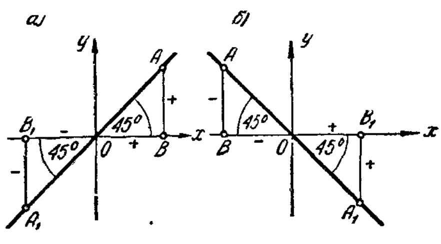


Фиг. 1,3.

Задача 1, 4 (для самостоятельного решения). Дана точка A (3, -4). Построить точки, симметричные ей относительно: а) оси абсцисс, б) оси ординат, в) начала координат.

Ответ. а) B (3, 4); б) $C(-3, -4)$; в) $D(-3, +4)$.

Задача 1, 5. Какое соотношение существует между координатами точки, если она лежит: а) на биссектрисе первого и третьего координатных углов; б) на биссектрисе второго и четвертого координатных углов.



Фиг. 1,4.

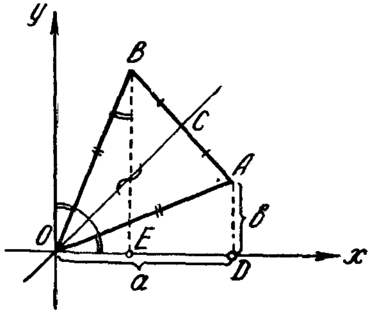
Решение. а) Биссектриса первого и третьего координатных углов делит эти углы пополам и с положительным направлением оси Ox составляет угол в 45°. Если из любой точки $A(x, y)$ этой биссектрисы опустить перпендикуляр на ось Ox, то треугольник OAB будет равнобедренным прямоугольным треугольником, и потому его катеты OB и AB между собою равны (фиг. 1, 4*а*). Так как катет OB есть абсцисса точки A, а катет AB — ее ордината*, то заключение состоит в том, что абсцисса и ордината любой точки этой биссектрисы между собою равны, причем это верно независимо от того, находится ли точка A в первом координатном углу или в третьем, так как в каждом из них абсцисса

* Коордиатами точки могут быть не только числа, но и отрезки, измеренные единицей масштаба.

и ордината точки имеют один и тот же знак. Итак, для координат точек этой биссектрисы имеет место равенство $x = y$.

б) для точек биссектрисы второго и четвертого координатных углов мы, рассуждая так же, придем к заключению, что абсцисса и ордината любой точки на этой биссектрисе также равны между собою по абсолютной величине, но противоположны по знаку, что следует из таблицы знаков абсциссы и ординаты во второй и четвертой четвертях:

Четверти	II	IV
x	—	+
y	+	—



Фиг. 1,5.

Таким образом, для координат точек, лежащих на этой биссектрисе, выполняется равенство $x = -y$.

Задача 1, 6. Точка $A(a, в)$ находится внутри первого координатного угла. Определить координаты точки B, симметричной с точкой A относительно биссектрисы этого координатного угла.

Решение. Так как точка B симметрична точке A относительно биссектрисы первого координатного угла, то она лежит с точкой A на перпендикуляре к OC и $AC = CB$ (фиг. 1, 5). Учитывая это, а также то, что в треугольниках OAC и OCB катет OC — общий, заключаем, что эти прямоугольные треугольники между собою равны (фиг. 1, 5).

Рассмотрев теперь треугольники OBE и OAD, мы придем к заключению, что и они равны, так как, будучи прямоугольными они имеют равные гипотенузы и равные острые углы AOD и OBE. Почему?

Из равенства треугольников OBE и OAD заключаем, что $OD = BE$, а $AD = OE$. Так как по условию абсцисса OD точки A равна a, а ее ордината $AD = в$, то мы приходим к заключению, что точка B имеет абсциссу $OE = AD = в$, а ординату $BE = OD = a$. Итак, координатами точки B служат числа $в$ и a: $B(в, a)$.

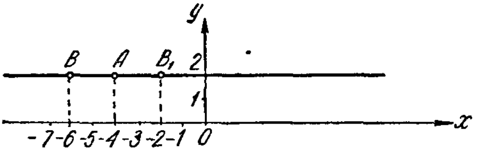
Задача 1, 7 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки B, симметричной точке A (—12, 4) относительно биссектрисы третьего координатного угла.

Ответ. $B(4, -12)$.

Задача 1, 8 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки B, симметричной точке $A(2, 4)$ относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

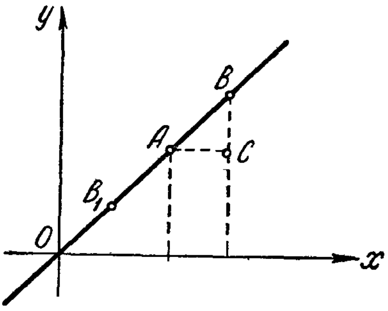
Ответ. $B(-4, -2)$.

Задача 1, 9. Точки $A(-4, 2)$ и $B(x, y)$ лежат на прямой, параллельной оси Ox, причем расстояние между ними равно 2 ед. масштаба. Определить координаты точки B.



Фиг. 1,6.

Решение. Задача допускает два решения: точка B может находиться как слева, так и справа от точки A. Так как в каждом из этих случаев точка B лежит на прямой, параллельной оси Ox, то ордината ее y в обоих случаях будет равна ординате точки A, т. е. $y = 2$. Абсцисса же ее в том случае, когда она находится слева от точки A, будет равна -6, а когда она находится справа от A, будет равна -2. Итак, $B(-6, 2)$, а $B_1(-2, 2)$ (фиг. 1, 6).



Фиг. 1,7.

Задача 1, 10 (для самостоятельного решения). Точки $A(-5, 2)$ и $B(x, y)$ лежат на прямой, параллельной оси Oy. Найти координаты точки B, если она находится от точки A на расстоянии 6 ед. масштаба. Построить чертеж.

Ответ. $B_1(-5, 8)$ и $B_2(-5, -4)$.

Задача 1, 11. Точки $A(5, 5)$ и $B(x, y)$ лежат на биссектрисе первого координатного угла. Расстояние между ними равно 4 ед. масштаба. Найти координаты точки B.

Решение. Так как точка B лежит на биссектрисе первого координатного угла, то ее абсцисса и ордината между собою равны (задача 1, 5). В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC (фиг. 1, 7) гипотенуза $AB = 4$, а $AC = BC$. Тогда по теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \text{ и } 2AC^2 = 16, \; AC^2 = 8; \; AC = BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, абсцисса искомой точки (а значит, и ее ордината) получится из абсциссы точки A, если к ней сначала прибавить, а потом из нее вычесть $2\sqrt{2}$, и задача имеет два решения:

$$B(5 + 2\sqrt{2}, \; 5 + 2\sqrt{2}) \text{ и } B_1(5 - 2\sqrt{2}, \; 5 - 2\sqrt{2}).$$

Задача 1, 12. Найти расстояние между точками $A(4, -5)$ и $B(7, -1)$.

Решение. По формуле (1, 1) для расстояния d между двумя точками, если взять в ней $x_1 = 4$; $x_2 = 7$; $y_1 = -5$; $y_2 = -1$, получаем

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + [-1-(-5)]^2}; \quad d = 5 \text{ ед. масштаба.}$$

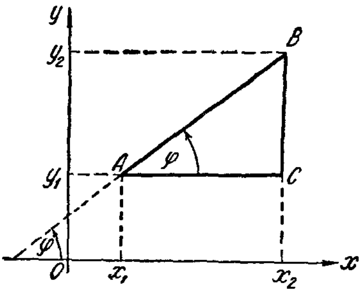
Задача 1, 13 (для самостоятельного решения). Определить расстояние между точками $A(-3, 9)$ и $B(3, 1)$.

Ответ. $d = 10$ ед. масштаба.

Задача 1, 14 (для самостоятельного решения). Найти длину отрезка AB, соединяющего точки $A(-11,5)$ и $B(1,0)$.

Ответ. $d = 13$ ед. масштаба.

Задача 1, 15 Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонен отрезок, соединяющий точки $A(-1, 3)$ и $B(7, -3)$?



Фиг. 1,8.

Решение. По известным координатам точек A и B можно определить тангенс угла, под которым отрезок AB наклонен к оси Ox. Если x_1 и y_1 — координаты точки A, а x_2 и y_2 — координаты точки B, то из фиг. 1, 8 усматриваем, что величина $AC = x_2 - x_1$, а величина $BC = y_2 - y_1$, и тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1, 2}$$

По этой формуле определится тангенс угла между отрезком AB и положительным направлением оси Ox, причем этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки. Формула (1, 2) верна при любом расположении точек A и B на плоскости.

Подставляя в формулу (1, 2) координаты точек A и B, получим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3-(+3)}{7-(-1)} = -\frac{3}{4},$$

$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}$ или $-\operatorname{tg} \varphi = 0{,}75$. Но $-\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(180° - \varphi)$, и у нас $\operatorname{tg}(180° - \varphi) = 0{,}75$; отсюда $180° - \varphi = 36°52'$, а $\varphi = 180° - 36°52' = 143°08'$. В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (1, 2) для определения угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Определенный по этой формуле $\operatorname{tg} \varphi$ называется угловым коэффициентом прямой. Решим еще одну аналогичную задачу.

Задача 1, 16. Отрезок AB соединяет точки $A(-6, 7)$ и $B(1, -2)$. Определить длину этого отрезка и угол между ним и положительным направлением оси Ox.

Решение. По формуле (1, 1), полагая в ней $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $y_1 = 7$, $y_2 = -2$, получаем, что длина $AB \approx 11{,}4$ ед. масштаба (знак $\approx$ означает, что имеет место приближенное равенство). Теперь по формуле (1, 2) находим угловой коэффициент отрезка AB: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{9}{7}$. Перепишем это равенство в виде $-\operatorname{tg}\varphi = \frac{9}{7}$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = 1{,}2857$, и по таблицам найдем, что $\varphi = 127^\circ 52'$.

Задача 1,17 (для самостоятельного решения). Найти длину отрезка AB, соединяющего точки $A(-4, 5)$ и $B(-6, 7)$ и угол между этим отрезком и положительным направлением оси Ox.

Ответ. $AB = \sqrt{8}$ ед. масштаба; $\varphi = 135^\circ$.

Задача 1, 18. Найти периметр треугольника, если координаты его вершин известны: $A(-3, -6)$; $B(4, -1)$; $C(5, -2)$.

Ответ. $AB \approx 8{,}6$ ед. масштаба;

$AC \approx 8{,}9$ ед. масштаба;

$BC \approx 1{,}4$ ед. масштаба;

периметр треугольника $AB + AC + BC \approx 8{,}6 + 8{,}9 + 1{,}4 = 18{,}9$ ед. масштаба.

Задача 1, 19 (для самостоятельного решения). Найти периметр треугольника с вершинами $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(-5, -7)$.

Ответ. Периметр треугольника приближенно равен 30,3 ед. масштаба.

Задача 1, 20. Доказать, что треугольник, вершины которого $A(2, 3)$; $B(6, 7)$; $C(-7, 2)$ — тупоугольный.

Решение. 1) Определяем длины сторон и находим, что

$AB = \sqrt{32}$ ед. масштаба;

$AC = \sqrt{82}$ ед. масштаба;

$BC = \sqrt{194}$ ед. масштаба.

Значит, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ $(194 > 32 + 82)$; треугольник действительно тупоугольный.

Замечание. Из элементарной геометрии известно, что если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник — прямоугольный; если квадрат бо́льшей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — остроугольный; если же квадрат бо́льшей из сторон треугольника больше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — тупоугольный. Пользуясь этим замечанием, решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 1, 21. Определить вид треугольника, если координаты его вершин известны:

$$A(2, -5);\quad B(-7, -4);\quad C(-1, 6).$$

Ответ. Треугольник — остроугольный, так как длины сторон равны:

$$AB = \sqrt{82};\ AC = \sqrt{130};\ BC = \sqrt{136}.$$

Задача 1, 22 (для самостоятельного решения). Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный, если координаты его вершин

$$A(0,\ 0);\ B(4,\ 2);\ C(-2,\ 4).$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Деление отрезка в заданном отношении.* Координаты середины отрезка. Определение площади треугольника по известным координатам его вершин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Если x_1 и y_1 — координаты точки A, а x_2 и y_2 — координаты точки B, то координаты x и y точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2, 1}$$

Если $\lambda = 1$, то точка $C(x,\ y)$ делит отрезок AB пополам, и тогда координаты x и y средины отрезка AB определятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2, 2}$$

2. Площадь треугольника по известным координатам его вершин $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]. \tag{2, 3}$$

Полученное с помощью этой формулы число следует взять по абсолютной величине.

Задача 2, 1. Найти координаты точки C — средины отрезка, соединяющего точки $A(-2,\ 4)$ и $B(-4,\ 10)$.

Решение. Воспользуемся формулами (2, 2). *Запомните, что каждая координата средины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

В формулах (2, 2) возьмем $x_1 = -2$; $x_2 = -4$; $y_1 = 4$; $y_2 = 10$. Тогда абсцисса средины отрезка AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3,$$