Ответ. Треугольник — остроугольный, так как длины сторон равны:

$$AB = \sqrt{82};\ AC = \sqrt{130};\ BC = \sqrt{136}.$$

Задача 1, 22 (для самостоятельного решения). Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный, если координаты его вершин

$$A(0,\ 0);\ B(4,\ 2);\ C(-2,\ 4).$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Деление отрезка в заданном отношении.* Координаты середины отрезка. Определение площади треугольника по известным координатам его вершин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Если x_1 и y_1 — координаты точки A, а x_2 и y_2 — координаты точки B, то координаты x и y точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2, 1)$$

Если $\lambda = 1$, то точка $C(x,\ y)$ делит отрезок AB пополам, и тогда координаты x и y средины отрезка AB определятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2, 2)$$

2. Площадь треугольника по известным координатам его вершин $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]. \qquad (2, 3)$$

Полученное с помощью этой формулы число следует взять по абсолютной величине.

Задача 2, 1. Найти координаты точки C — средины отрезка, соединяющего точки $A(-2,\ 4)$ и $B(-4,\ 10)$.

Решение. Воспользуемся формулами (2, 2). *Запомните, что каждая координата средины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

В формулах (2, 2) возьмем $x_1 = -2$; $x_2 = -4$; $y_1 = 4$; $y_2 = 10$. Тогда абсцисса средины отрезка AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3,$$

а ордината средины отрезка AB

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Итак, средина отрезка AB — точка $C(-3, 7)$.

Задача 2, 2 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки C — средины отрезка AB, если координаты концов отрезка известны: $A(-7, 5)$; $B(11, -9)$.

Ответ. $x = 2$; $y = -2$; $C(2, -2)$.

Задача 2, 3. Найти координаты конца B отрезка, если другой конец отрезка — точка $A(-5, -7)$, а средина отрезка — $C(-9, -12)$.

Решение. В формулах (2, 2) координаты средины отрезка обозначены через x и y. По условию задачи $x = -9$; $y = -12$. Координаты одного конца отрезка точки A в этих формулах $x_1 = -5$; $y_1 = -7$. Координаты точки B (другого конца отрезка) — величины неизвестные, которые мы обозначим через x_2 и y_2. Тогда по формулам (2, 2) для определения этих неизвестных получаем два уравнения:

$$-9 = \frac{-5 + x_2}{2}; \quad -12 = \frac{-7 + y_2}{2}.$$

Отсюда

$$-18 = -5 + x_2 \text{ и } x_2 = -13,$$
$$-24 = -7 + y_2 \text{ и } y_2 = -17.$$

Задача 2, 4 (для самостоятельного решения). Один конец отрезка $A(-4, 2)$, средина отрезка $C(-6, 5)$. Найти координаты, точки B другого конца отрезка.

Ответ. $x_2 = -8$; $y_2 = 8$.

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Даны вершины треугольника:

$$A(-7, 4); \; B(-5, 2); \; C(6, -3).$$

Найти координаты средин его сторон.

Ответ. Если обозначить средину стороны AB буквой E, средину стороны AC буквой F, а средину стороны BC буквой K, то координаты этих точек: $E(-6, 3)$; $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Задача 2, 6 (для самостоятельного решения). Даны вершины треугольника:

$$A(-4, 6); \; B(-8, 9); \; C(5, -6).$$

Найти координаты точек E, F и K средин сторон AB, AC и BC.

Ответ. $E\left(-6; \frac{15}{2}\right)$; $F\left(+\frac{1}{2}; 0\right)$; $K\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 2, 7. Даны координаты средин сторон треугольника: $E(7, 8)$; $F(-4, 5)$; $K(1, -4)$. Определить координаты вершин треугольника.

Решение. Пусть точки A, B и C — вершины треугольника, точка E — средина стороны AB, точка F — средина стороны AC, а K — средина стороны BC. Требуется найти координаты точек A, B и C.

Обозначим через x_A и y_A — координаты вершины A,
» x_B и y_B — координаты вершины B,
» x_C и y_C — координаты вершины C.

По формулам (2, 2) имеем

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad (*)$$

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad y_F = \frac{y_A + y_C}{2}; \qquad (**)$$

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2}. \qquad (***)$$

Подставляя в эти формулы координаты точек E, F и K, мы для определения неизвестных получим следующие уравнения:

а) Уравнения, отмеченные (*), после подстановки в них координат точки E запишутся так:

$$7 = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad 8 = \frac{y_A + y_B}{2},$$

или

$$x_A + x_B = 14; \quad y_A + y_B = 16.$$

б) Уравнения, отмеченные (**), если подставить в них координаты точки F, запишутся в виде

$$-4 = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad 5 = \frac{y_A + y_C}{2},$$

или
$$x_A + x_C = -8; \quad y_A + y_C = 10.$$

в) Если же в уравнения, отмеченные (***), подставить координаты точки K, то эти уравнения запишутся так:

$$1 = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad -4 = \frac{y_B + y_C}{2},$$

или
$$x_B + x_C = 2, \quad y_B + y_C = -8.$$

Итак, для определения шести неизвестных мы получили такие две системы уравнений:

Первая система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_A + x_B &= 14 \\ x_A + x_C &= -8 \\ x_B + x_C &= 2 \end{aligned}\right\},$$

Вторая система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_A + y_B &= 16 \\ y_A + y_C &= 10 \\ y_B + y_C &= -8 \end{aligned}\right\}.$$

Складывая почленно уравнения первой системы, будем иметь

$$x_A + x_B + x_A + x_C + x_B + x_C = 8.$$

После приведения подобных членов и деления обеих частей уравнения на 2 получим

$$x_A + x_B + x_C = 4. \qquad (2, 4)$$

Так как на основании третьего уравнения первой системы $x_B + x_C = 2$, то из (2, 4) получаем $x_A + 2 = 4$, а $x_A = 2$; используя второе уравнение первой системы $x_A + x_C = -8$, получим $x_B - 8 = 4$; $x_B = 12$; на основании первого уравнения первой системы $x_A + x_B = 14$, и уравнение (2, 4) примет вид

$$x_C + 14 = 4; \text{ а } x_C = -10.$$

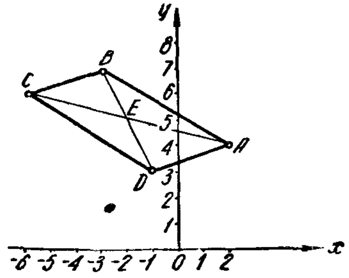
Итак,

$$x_A = 2; \quad x_B = 12; \quad x_C = -10.$$

Поступая так же, найдем из второй системы уравнений

$$y_A = 17; \quad y_B = -1; \quad y_C = -7.$$

Вершины треугольника имеют такие координаты:



Фиг. 2,1.

$$A\,(2,\ 17); \quad B\,(12,\ -1); \quad C\,(-10,\ -7)$$

(проверить правильность полученного решения по условию задачи).

Задача 2, 8 (для самостоятельного решения). Координаты средин сторон треугольника $E\,(-4,\ 6)$; $F\,(2,\ -6)$; $K\,(0,\ -4)$. Найти координаты вершин треугольника.

Ответ. $x_A + x_B + x_C = -2$; $x_A = -2$; $x_B = -6$; $x_C = 6$;
$y_A + y_B + y_C = -4$; $y_A = 4$; $y_B = 8$; $y_C = -16$.
Координаты вершин треугольника: $A\,(-2,\ 4)$; $B\,(-6,\ 8)$; $C\,(6,\ -16)$.

Задача 2, 9. Точки $A\,(2,\ 4)$, $B\,(-3,\ 7)$ и $C\,(-6,\ 6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

Решение. Требование задачи: «найти четвертую вершину» означает, что следует найти ее координаты. Решение задачи облегчит чертеж (фиг. 2, 1).

Известно, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Поэтому координаты точки E — пересечения диагоналей найдем как координаты средины отрезка AC. Обозначая их через x_E и y_E, получим, что

$$x_E = \frac{2 + (-6)}{2}; \quad x_E = -2;$$

$$y_E = \frac{4 + 6}{2}; \qquad y_E = 5.$$

$$E\,(-2,\ 5).$$

Зная координаты точки E — средины диагонали BD и координаты одного из ее концов $B(-3, 7)$, по формулам (2, 2) легко определим искомые координаты вершины D параллелограмма. В формулах (2, 2) надо положить $x = -2$; $y = 5$; $x_1 = -3$; $y_1 = 7$. Искомыми будут x_D и y_D — координаты точки D. Получаем такие уравнения:

$$-2 = \frac{-3 + x_D}{2}; \quad -4 = -3 + x_D; \quad x_D = -1.$$

$$5 = \frac{7 + y_D}{2}; \quad 10 = 7 + y_D; \qquad y_D = 3.$$

Итак, вершина $D(-1, 3)$.

Задача 2, 10 (для самостоятельного решения). Три вершины параллелограмма имеют координаты $A(-6, -4)$; $B(-4, 8)$; $C(-1, 5)$, причем A и C — противоположные вершины. Определить координаты четвертой вершины параллелограмма.

Ответ. Координаты точки E пересечения диагоналей $E\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Координаты четвертой вершины параллелограмма $D(-3, -7)$.

Теперь решим несколько задач, связанных с делением отрезка AB в данном отношении (формула (2, 1)). Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, то это следует понимать так: $\lambda = \frac{AC}{CB}$. Числитель этой дроби есть длина отрезка, начало которого находится в точке A — в начале отрезка AB, а конец в точке C, делящей этот отрезок. Знаменатель дроби есть длина отрезка, имеющего начало в точке C, а конец в точке B — в конце отрезка AB. Это замечание, разъясняющее смысл числа λ, поможет избежать ошибок. В формулах (2, 1) в числителе λ является множителем при координатах конца отрезка.

Задача 2, 11. Отрезок AB, соединяющий точки $A(2, 5)$ и $B(4, 9)$, разделить в отношении $1:3$.

Решение. Условие задачи требует найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

Точку $A(2, 5)$ будем считать началом отрезка, а точку $B(4, 9)$ — ее концом. В формулах (2, 1) x и y — искомые координаты точки C, x_1 и y_1 — координаты точки A, x_2 и y_2 — координаты точки B; $\lambda = \frac{1}{3}$. Значит, у нас $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $y_1 = 5$; $y_2 = 9$. Итак, по формулам (2, 1)

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}}; \quad x = \frac{2 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}; \quad x = \frac{5}{2};$$

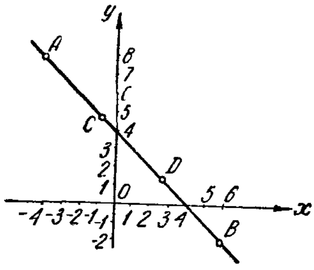
$$y = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot 9}{1 + \frac{1}{3}}; \quad y = \frac{5+3}{\frac{4}{3}}; \quad y = 6.$$

Точка C имеет координаты $C\left(\frac{5}{2}, 6\right)$.

Задача 2, 12. Концы отрезка AB имеют координаты: $A(-4, 8)$, $B(6, -2)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части (фиг. 2, 2).

Решение. Отрезок AB разделен на три равные части, а точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Так как $AC = \frac{1}{2} CB$, то отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}.$$



Фиг. 2,2.

В первой из формул (2, 1) следует положить

$$x_1 = -4;$$
$$x_2 = 6;$$
$$\lambda = \frac{1}{2};$$

x_C — искомая абсцисса точки C.

Во второй из формул (2, 1) надо положить, что

$$y_1 = 8;$$
$$y_2 = -2;$$

y_C — искомая ордината точки C.

Итак,

$$x_C = \frac{-4 + \frac{1}{2} \cdot 6}{1 + \frac{1}{2}}; \quad x_C = \frac{-4+3}{\frac{3}{2}}; \quad x_C = -\frac{2}{3};$$

$$y_C = \frac{8 + \frac{1}{2} \cdot (-2)}{1 + \frac{1}{2}}; \quad y_C = \frac{8-1}{\frac{3}{2}}; \quad y_C = \frac{14}{3}.$$

Координаты точки C найдены. $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Координаты точки D можно определить просто, как координаты средины отрезка CB. Пользуясь формулами для определения координат средины отрезка, получаем

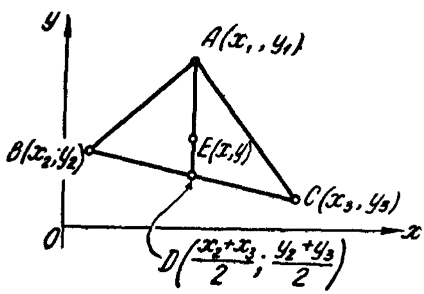
$$x_D = \frac{-\frac{2}{3}+6}{2}; \quad x_D = \frac{8}{3};$$

$$y_D = \frac{\frac{14}{3}-2}{2}; \quad y_D = \frac{4}{3}.$$

Задача 2, 13 (для самостоятельного решения). Найти координаты точек, делящих отрезок с началом в точке $A(-6, 10)$ и концом в точке $B(-2, -6)$ в отношениях:

1) $\lambda = \frac{1}{2}$; 2) $\lambda = 2$; 3) $\lambda = \frac{1}{3}$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$.

Ответ. 1) $\left(-\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) $(-5, 6)$; 4) $\left(-\frac{22}{5}, \frac{18}{5}\right)$.



Фиг. 2,3

Задача 2, 14. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника, вершинам которого соответствуют координаты: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (толщину пластинки не учитывать).

Решение. Центр тяжести треугольника, указанного в условии задачи, находится в точке пересечения его медиан. Из элементарной геометрии известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка делит медианы в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника. Обозначим эту точку буквой E, ее координаты — x_E и y_E (фиг. 2, 3).

Рассмотрим медиану, проведенную из вершины A. Один ее конец A имеет координаты (x_1, y_1), а координаты другого ее конца получим, как координаты средины отрезка BC, концы которого имеют известные координаты: $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Координаты точки D обозначим через x_D и y_D и по формулам (2, 2) для определения координат средины отрезка получим

$$x_D = \frac{x_2+x_3}{2}; \quad y_D = \frac{y_2+y_3}{2}; \quad D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Теперь, зная координаты начала A и конца D отрезка AD и то, что точка $E(x_E, y_E)$ делит этот отрезок в отношении $\lambda = 2$, по формулам (2, 1) получаем

$$x_E = \frac{x_1 + 2\frac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad x_E = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$

$$y_E = \frac{y_1 + 2\frac{y_2 + y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad y_E = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Полученный результат приводит к выводу, *что координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки, если не учитывать ее толщину, равны среднему арифметическому одноименных координат ее вершин.*

Задача 2, 15 (для самостоятельного решения). Найти центр тяжести однородной треугольной пластинки, вершины которой имеют координаты (толщиной пластинки пренебречь): $A(2, -3)$; $B(-3, 6)$; $C(-7, 0)$.

Ответ. $x = -\frac{8}{3}$; $y = 1$.

Задача 2, 16. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2, -3)$, $B(1, 1)$, $C(-6, 5)$.

Решение. Задачу очень просто решить, воспользовавшись формулой (2, 3), в которой нужно взять

$$x_1 = 2, \ x_2 = 1, \ x_3 = -6; \ y_1 = -3, \ y_2 = 1, \ y_3 = 5.$$

Подставляя эти числа в (2, 3), получим

$$S = \frac{1}{2}\{[2 - (-6)] \cdot (1 - 5) - [1 - (-6)] \cdot (-3 - 5)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(2 + 6) \cdot (-4) - (1 + 6) \cdot (-8)\} = \frac{1}{2}[-32 - (-56)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-32 + 56) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12;$$

$$S = 12 \text{ кв. ед.}$$

Решение задач, в которых требуется определить площадь треугольника по координатам его вершин, не представляет трудности, а потому можно ограничиться самостоятельным решением еще одной задачи.

Задача 2, 17 (для самостоятельного решения). Координаты вершин треугольника: $A(-2, 4)$, $B(-6, 8)$, $C(5, -6)$. Определить площадь этого треугольника.

Ответ. $S = 6$ кв. ед.

Задача 2, 18. Доказать, что три точки $A(1, 8)$, $B(-2, -7)$, $C(-4, -17)$ лежат на одной прямой.

Решение. Если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то треугольник ABC обратится в отрезок прямой, а потому его площадь должна быть равна нулю. Полагая в формуле (2, 3) $S=0$, получим условие, при котором три точки лежат на одной прямой

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)=0,$$

или

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)=(x_2-x_3)(y_1-y_3).$$

В более удобной форме условие, при котором три точки лежат на одной прямой, можно записать так:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}. \qquad (2, 5)$$

Подставляя сюда координаты данных точек, получим, что левая часть (2, 5) будет равна

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{5}{2},$$

а правая часть

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{5}{2}.$$

Требование (2, 5) выполнено:

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2},$$

и, значит, три данные точки лежат на одной прямой.

Задача 2, 19 (для самостоятельного решения). Проверить, что три точки: $A(1, 5)$, $B(-5, -1)$, $C(-8, -4)$ лежат на одной прямой.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Различные виды уравнеиия прямой. Исследование общего уравнения прямой. Построение прямой по ее уравнению.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В прямоугольных координатах уравнение прямой на плоскости задается в одном из следующих видов:

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y=kx+b, \qquad (3, 1)$$

где k — угловой коэффициент прямой, т. е. тангенс того угла, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, причем этот угол отсчитывается от оси Ox к прямой против часовой стрелки, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При $b=0$ уравнение (3, 1) имеет вид $y=kx$, и соответствующая ему прямая проходит через начало координат.