Решение. Если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то треугольник ABC обратится в отрезок прямой, а потому его площадь должна быть равна нулю. Полагая в формуле (2, 3) $S=0$, получим условие, при котором три точки лежат на одной прямой

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)=0,$$

или

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)=(x_2-x_3)(y_1-y_3).$$

В более удобной форме условие, при котором три точки лежат на одной прямой, можно записать так:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}. \qquad (2, 5)$$

Подставляя сюда координаты данных точек, получим, что левая часть (2, 5) будет равна

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{5}{2},$$

а правая часть

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{5}{2}.$$

Требование (2, 5) выполнено:

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2},$$

и, значит, три данные точки лежат на одной прямой.

Задача 2, 19 (для самостоятельного решения). Проверить, что три точки: $A(1,\ 5)$, $B(-5,\ -1)$, $C(-8,\ -4)$ лежат на одной прямой.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Различные виды уравнения прямой. Исследование общего уравнения прямой. Построение прямой по ее уравнению.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В прямоугольных координатах уравнение прямой на плоскости задается в одном из следующих видов:

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y=kx+b, \qquad (3, 1)$$

где k — угловой коэффициент прямой, т. е. тангенс того угла, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, причем этот угол отсчитывается от оси Ox к прямой против часовой стрелки, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При $b=0$ уравнение (3, 1) имеет вид $y=kx$, и соответствующая ему прямая проходит через начало координат.

Уравнением (3, 1) может быть определена любая прямая на плоскости, не перпендикулярная оси Ox.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом разрешено относительно текущей координаты y.

2. *Общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0. \tag{3, 2}$$

Частные случаи общего уравнения прямой:

а) Если $C = 0$, уравнение (3, 2) будет иметь вид

$$Ax + By = 0,$$

и прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты начала координат $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют этому уравнению.

б) Если в общем уравнении (3, 2) $B = 0$, то уравнение примет вид

$$Ax + C = 0, \text{ или } x = -\frac{C}{A}.$$

Уравнение не содержит переменной y, а определяемая этим уравнением прямая параллельна оси Oy.

в) Если в общем уравнении прямой (3, 2) $A = 0$, то это уравнение примет вид

$$By + C = 0, \text{ или } y = -\frac{C}{B};$$

уравнение не содержит переменной x, а определяемая им прямая параллельна оси Ox.

Следует запомнить: если прямая параллельна какой-нибудь координатной оси, то в ее уравнении отсутствует член, содержащий координату, одноименную с этой осью.

г) При $C = 0$ и $A = 0$ уравнение (3, 2) принимает вид $By = 0$, или $y = 0$.

Это уравнение оси Ox.

д) При $C = 0$ и $B = 0$ уравнение (3, 2) запишется в виде $Ax = 0$ или $x = 0$.

Это уравнение оси Oy.

3. *Уравнение прямой в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3, 3}$$

где a — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox,

b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Каждый из этих отрезков отложен от начала координат.

Особенности этого уравнения такие: в левой части уравнения между дробями стоит знак плюс, величины a и b могут быть как положительными, так и отрицательными, правая часть уравнения равна единице.

4. *Нормальное уравнение прямой*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (3, 4)$$

Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, измеренная в ед. масштаба, а α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox. Отсчитывается этот угол от оси Ox против часовой стрелки. Для приведения общего уравнения прямой (3, 2) к нормальному виду обе его части надо умножить на нормирующий множитель.

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (3, 5)$$

причем перед дробью следует выбрать знак, противоположный знаку свободного члена C в общем уравнении прямой (3, 2).

Особенности нормального уравнения прямой: сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, свободный член отрицателен, а правая часть его равна нулю.

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ЕЕ УРАВНЕНИЮ

Прямая вполне определена, если известны две принадлежащие ей точки. Для того, чтобы построить прямую по ее уравнению, надо, пользуясь этим уравнением, найти координаты двух ее точек. Твердо следует помнить, *что если точка принадлежит прямой, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой*.

При практическом построении прямой по ее уравнению наиболее точный график получится тогда, когда координаты взятых для ее построения двух точек — целые числа.

1. Если прямая определена общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и $C \neq 0$, то для ее построения проще всего определить точки пересечения прямой с координатными осями.

Укажем, как определить координаты точек пересечения прямой с координатными осями. Координаты точки пересечения прямой с осью Ox находят из следующих соображений: ординаты всех точек, расположенных на оси Ox, равны нулю. В уравнении прямой полагают, что y равно нулю, и из полученного уравнения находят x. Найденное значение x и есть абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Если окажется, что $x = a$, то координаты точки пересечения прямой с осью Ox будут $(a, 0)$.

Чтобы определить координаты точки пересечения прямой с осью Oy, рассуждают так: абсциссы всех точек, расположенных на оси Oy, равны нулю. Взяв в уравнении прямой x равным нулю, из полученного уравнения определяют y. Найденное значение y и будет ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Если окажется, например, что $y = b$, то точка пересечения прямой с осью Oy имеет координаты $(0, b)$.

Пример. Прямая $2x + y - 6 = 0$ пересекает ось Ox в точке $(3, 0)$. Действительно, взяв в этом уравнении $y = 0$, получим для определения x уравнение $2x - 6 = 0$, откуда $x = 3$.

Чтобы определить точку пересечения этой прямой с осью Oy, положим в уравнении прямой $x = 0$. Получим уравнение $y - 6 = 0$, из которого следует, что $y = 6$. Таким образом, прямая пересекает координатные оси в точках $(3, 0)$ и $(0, 6)$.

Если же в общем уравнении прямой $C = 0$, то прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат. Таким образом, уже известна одна ее точка, и для построения прямой остается только найти ее еще одну точку. Абсциссу x этой точки задают произвольно, а ординату y находят из уравнения прямой.

Пример. Прямая $2x - 4y = 0$ проходит через начало координат. Вторую точку прямой определим, взяв, например, $x = 2$. Тогда для определения y получаем уравнение $2 \cdot 2 - 4y = 0$; $4y = 4$; $y = 1$. Итак, прямая $2x - 4y = 0$ проходит через точки $(0, 0)$ и $(2, 1)$.

2. Если прямая задана уравнением (3, 1) с угловым коэффициентом, то из этого уравнения уже известна величина отрезка b, отсекаемого прямой на оси ординат, и для построения прямой остается определить координаты еще только одной точки, принадлежащей этой прямой. Если в уравнении (3, 1) $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то легче всего определить координаты точки пересечения прямой с осью Ox. Выше было указано, как это сделать.

Если же в уравнении (3, 1) $b = 0$, то прямая проходит через начало координат, и тем самым уже известна одна принадлежащая ей точка. Чтобы найти еще одну точку, следует дать x любое значение и определить из уравнения прямой значение y, соответствующее этому значению x.

Пример. Прямая $y = \frac{1}{2}x$ проходит через начало координат и точку $(2, 1)$ так как при $x = 2$ из ее уравнения $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

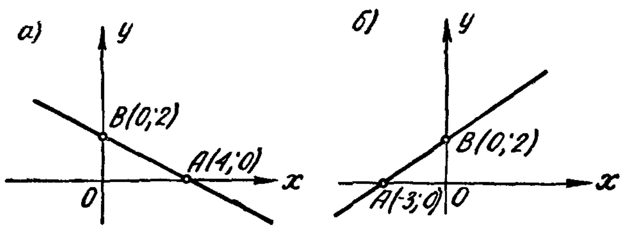
Построение прямых, параллельных координатным осям, затруднений не вызывает.

Теперь будем строить прямые по их уравнениям.

Задача 3.1. Построить прямые: а) $x + 2y - 4 = 0$; б) $2x - 3y + 6 = 0$; в) $y = 3x + 2$; г) $y = -2x$; д) $2x + 3y = 0$;

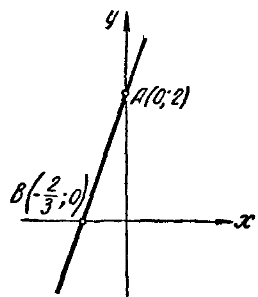
е) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$; ж) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$; з) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$; и) $y=2$; к) $x+3=0$.

а) Определим точки пересечения прямой $x+2y-4=0$ с координатными осями. Взяв в этом уравнении сначала $y=0$, найдем



Фиг. 3,1.

из него, что точка A пересечения прямой с осью Ox имеет абсциссу $x=4$. Координаты точки A $(4, 0)$. Положив теперь в уравнении $x=0$, найдем, что точка B пересечения прямой с осью Oy имеет ординату $y=2$. Координаты точки B $(0, 2)$. Построив эти точки, соединим их прямой (фиг. 3,1 *а*). Эта прямая и соответствует данному уравнению.



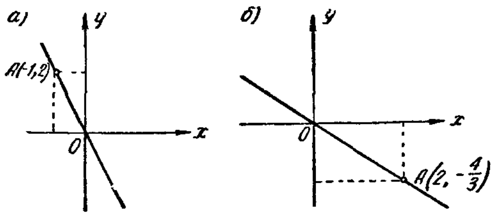
Фиг. 3,2.

б) Определим точки пересечения прямой $2x-3y+6=0$ с координатными осями: при $y=0$ получаем $2x+6=0$, $x=-3$. Точка A пересечения прямой с осью Ox имеет координаты $(-3, 0)$; при $x=0$ имеем $-3y+6=0$; $y=2$, и прямая пересекает ось Oy в точке B $(0, 2)$. Построим эти точки, соединим их прямой и получим прямую, соответствующую данному уравнению (фиг. 3,1 *б*).

в) Прямая $y=3x+2$ задана уравнением с угловым коэффициентом. Из уравнения видно, что прямая отсекает на оси ординат отрезок, величина которого $b=2$ (фиг. 3, 2). Значит, точка A $(0, 2)$ принадлежит прямой. Найдем еще одну точку на этой прямой. Как указано выше, легче всего определить точку пересечения прямой с осью Ox. Взяв в уравнении прямой равным нулю, получим $0=3x+2$, а $x=-\frac{2}{3}$, и точка B пересечения прямой с осью Ox имеет координаты $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Построив точки $(0, 2)$ и $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ и соединив их прямой, получим прямую, соответствующую этому уравнению.

г) Прямая $y = -2x$ проходит через начало координат ($b = 0$), а поэтому для ее построения достаточно найти еще только одну точку, принадлежащую ей.

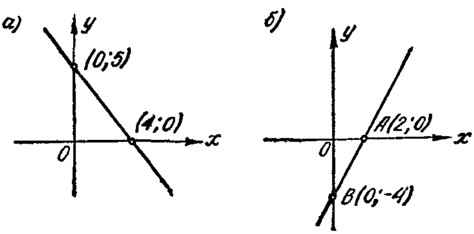
Взяв $x = -1$, получим, что $y = -2 \cdot (-1) = 2$ и, значит, точка $A(-1,2)$ принадлежит прямой. Проведя прямую через начало координат и точку $(-1,2)$, мы получим прямую, соответствующую данному уравнению (фиг. 3, 3 *а*).



Фиг. 3,3.

д) Прямая $2x + 3y = 0$ проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена. Найдем еще одну точку, принадлежащую прямой. Возьмем, например, на прямой точку с абсциссой $x = 2$. Подставляя в уравнение прямой $x = 2$, получим для определения ординаты этой точки уравнение $2 \cdot 2 + 3y = 0$; $3y = -4$; $y = -\frac{4}{3}$.

Таким образом, прямой принадлежит и точка $A\left(2, -\frac{4}{3}\right)$. Прямая, проведенная через начало координат и точку $A\left(2, -\frac{4}{3}\right)$, и будет соответствовать данному уравнению (фиг. 3, 3 *б*).



Фиг. 3,4.

е) Уравнение $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. Из него сразу усматриваем, что прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки, величины которых $a = 4$, $b = 5$ (фиг. 3, 4 *а*).

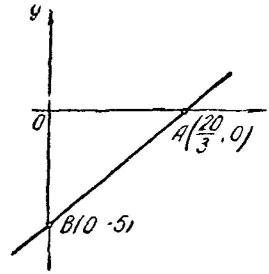
ж) Уравнение $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ преобразуем к виду (3,3). Запомните, что в уравнении прямой, в отрезках на осях в левой его части, между дробями должен быть знак плюс. На основании этого замечания данное уравнение перепишем в виде

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1;$$

тогда $a = 2$, а $b = -4$. Прямая, соответствующая этому уравнению, показана на фиг. 3, 4 *б*.

з) Для построения прямой $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$. Определим точки пересечения ее с координатными осями. Положив в ее уравнении $y=0$, найдем, что $\frac{3}{5}x-4=0$, а отсюда $x=\frac{20}{3}$, и точка A пересечения прямой с осью абсцисс имеет координаты $A\left(\frac{20}{3}, 0\right)$.

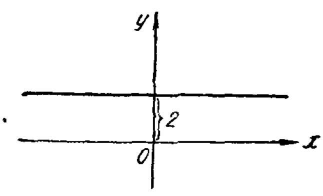
Взяв в уравнении прямой $x=0$, найдем, что $y=-5$ и точка B пересечения прямой с осью Oy имеет координаты $B(0, -5)$. Проводим через эти точки прямую. Она и соответствует данному уравнению (фиг. 3, 5).



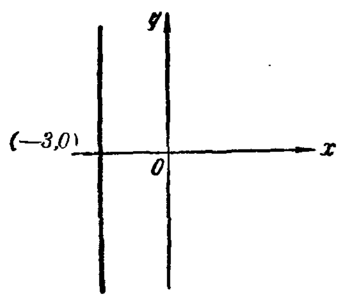
Фиг. 3,5.

и) Уравнение $y=2$ определяет прямую, у которой все точки имеют ординату, равную 2 ед. масштаба. Эта прямая, очевидно, параллельна оси Ox, находится над ней и проходит через точку (0, 2) (фиг. 3,6).

к) Уравнение $x+3=0$ перепишем в виде $x=-3$. Это уравнение определяет прямую, у которой все точки имеют абсциссы, равные -3. Ясно, что эта прямая параллельна оси Oy, находится слева от нее на расстоянии 3 ед. масштаба и проходит через точку (—3, 0) (фиг. 3, 7).



Фиг. 3,6.



Фиг. 3,7.

Задача 3, 2. Общее уравнение прямой $4x-3y+12=0$ представить в виде: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках на осях и 3) в нормальном виде. Построить эту прямую.

Решение. 1) Уравнение (3, 1) прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y=kx+b$. Чтобы заданное уравнение преобразовать к этому виду, разрешим его относительно y: $3y=4x+12$, $y=\frac{4}{3}x+4$.

Сравнивая с уравнением (3, 1), видим, что здесь угловой коэффициент прямой $k=\frac{4}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, $b=4$ (если уравнение прямой дано в общем виде (3, 2), то ее угловой коэффициент легко получить, если разделить коэффициент при x на коэффициент при y и взять полученное частное с обратным знаком $k=-\frac{A}{B}$*.

2) В отрезках на осях уравнение прямой имеет вид (3,3)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Чтобы определить величины отрезков, отсекаемых заданной прямой $4x-3y+12=0$, поступим так: в уравнении прямой положим $y=0$. Получаем $4x+12=0$, а $x=-3$. Значит, наша прямая пересекает ось Ox в точке с координатами $(-3, 0)$, и в уравнении (3, 3) величина отрезка $a=-3$.

Полагая в нашем уравнении $x=0$, определим ординату точки пересечения прямой с осью ординат. Будем иметь

$$-3y+12=0;\ y=4.$$

Точка пересечения прямой с осью ординат имеет координаты $(0, 4)$, и в уравнении (3, 3) величина отрезка $b=4$**.

Таким образом, наше уравнение в отрезках на осях будет иметь вид

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1.$$

3) Чтобы привести уравнение к нормальному виду, обе его части следует умножить на нормирующий множитель (3, 5), выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении прямой. В нашем случае свободный член в общем уравнении прямой равен $+12$, а поэтому перед корнем в нормирующем множителе должен быть выбран противоположный знак, т. е. знак минус, и так как

$$A=4,\ B=-3, \text{ то}$$

$$N=-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}};\ N=-\frac{1}{5}.$$

Умножая на $-\frac{1}{5}$ обе части уравнения

$$4x-3y+12=0,$$

приведем его к нормальному виду

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0.$$

---

* В дальнейшем вместо фразы «возьмем прямую с уравнением, например, $Ax+By+C=0$» мы будем употреблять более короткую: «возьмем прямую $Ax+By+C=0$». Мы обращаем на это внимание потому, что $Ax+By+C=0$ есть уравнение прямой, но не сама прямая.

** В дальнейшем вместо термина «величина отрезка» употребляется термин «отрезок»

Запомнить: *В нормальном уравнении прямой сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах должна быть равна единице, а свободный член должен быть отрицательным.* Эти два требования в полученном нами последнем уравнении, как легко проверить, выполнены. В пункте 2 решения мы получили уравнение прямой в отрезках на осях: $a = -3$, $b = 4$. Зная эти отрезки, мы легко построим нашу прямую (фиг. 3, 8).

Задачи 3, 3 и 3, 4 решаются так же, как и задача 3, 2. Поэтому приводятся только ответы. Эти задачи должны быть решены самостоятельно.

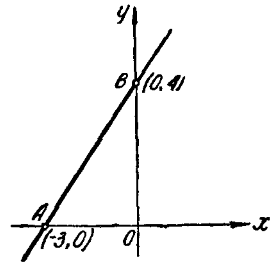
Задача 3, 3 (для самостоятельного решения). Уравнение прямой $6x + 8y - 15 = 0$ представить в виде:

1) с угловым коэффициентом, 2) в отрезках на осях.

Построить эту прямую.

Ответ. 1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}.$$



Фиг. 3,8.

2) Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{2{,}5} + \frac{y}{1{,}875} = 1.$$

Задача 3, 4 (для самостоятельного решения). Те же требования, что и в задаче 3, 3 для прямой $12x - 5y + 26 = 0$.

Ответ. $y = \frac{12}{5}x + \frac{26}{5}$; $\frac{x}{-\frac{13}{6}} + \frac{y}{\frac{26}{5}} = 1.$

Задача 3, 5. Под каким углом прямая $y = x + 2$ пересекает ось Ox?

Решение. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом в виде (3, 1). Сравнивая данное уравнение с уравнением $y = kx + b$, получаем, что $k = 1$. Нам известно, что k — угловой коэффициент прямой, т. е. k — это тангенс того угла, который прямая составляет с положительным направлением оси Ox. Этот угол мы обозначим буквой φ. Значит, $k = \operatorname{tg}\varphi$. У нас $k = 1$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = 1$; следовательно, $\varphi = 45°$. Этим заканчивается решение задачи.

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения). Под каким углом прямая $y = 2x + 3$ пересекает ось Ox?

Указание. При решении задачи воспользуйтесь таблицами тригонометрических функций.

Ответ. $\operatorname{tg}\varphi = 2$; $\varphi = 63°26'$.

Задача 3, 7. Найти уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Решение. Уравнение прямой с угловым коэффициентом в том случае, когда прямая проходит через начало координат, имеет вид

$$y = kx, \tag{3, 6}$$

так как в этом случае отрезок b, отсекаемый прямой на оси Oy, равен нулю. Биссектриса первого и третьего координатных углов составляет с положительным направлением оси Ox угол в $45°$. Величина k в уравнении (3, 1) есть тангенс этого угла, т. е. $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Подставляя это значение в уравнение (3, 6), получим $y = x$.

Это и есть уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов, его следует запомнить. Оно может быть записано также в виде $x - y = 0$.

Задача 3, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

Ответ. $y = -x$, или $x + y = 0$.

Задача 3, 9. Прямая проходит через точку $(2, -3)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Найти ее уравнение.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде (3, 1) с угловым коэффициентом. Это целесообразно сделать потому, что в задаче задан отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, а в уравнение прямой с угловым коэффициентом входит этот отрезок. Итак, в уравнении $y = kx + b$ нам известно, что $b = 3$. Подставим в него это значение и получим

$$y = kx + 3. \tag{A}$$

Следовательно, теперь осталось определить только угловой коэффициент k. По условию прямая проходит через точку $(2, -3)$. Если линия проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии. Подставим в последнее уравнение 2 вместо x и -3 вместо y. Получим уравнение для определения k: $-3 = 2k + 3$. Решая уравнение, находим, что $k = -3$.

Подставляя это значение k в (A), получим искомое уравнение прямой $y = -3x + 3$.

Задача 3, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, -3)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 4$. Эта задача решается так же, как и 3, 9.

Ответ. $y = 7x + 4$.

Задача 3, 11. Написать уравнение прямой, отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = 3$ и $b = 4$.

Решение. В уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

подставим $a = 3$ и $b = 4$. Получим искомое уравнение в виде

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Задача 3, 12 (для самостоятельного решения). Построить прямые, заданные уравнениями

1) $x + 2y - 6 = 0$; 2) $x - 3y + 9 = 0$;
3) $3x - y = 0$; 4) $x + 2y = 0$;
5) $x - 4 = 0$; 6) $2y - 3 = 0$.

Решим теперь две задачи, связанные с исследованием общего уравнения прямой.

Задача 3, 13. Указать особенности в расположении относительно координатных осей прямых

1) $2x - 5y = 0$; 2) $3x - 2 = 0$;
3) $7y + 12 = 0$; 4) $5x = 0$;
5) $3y = 0$.

Решение. 1) Прямая $2x - 5y = 0$ проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена.

2) Прямая $3x - 2 = 0$ параллельна оси Oy (ее уравнение не содержит текущей координаты y).

3) Прямая $7y + 12 = 0$ параллельна оси Ox (ее уравнение не содержит текущей координаты x).

4) Прямая $5x = 0$ совпадает с осью Oy (ее уравнение можно переписать в виде $x = 0$).

Задача 3, 14 (для самостоятельного решения). Указать особенности в расположении прямых

1) $5x + 3y = 0$; 4) $5y = 0$;
2) $4y + 8 = 0$; 5) $7x = 0$.
3) $3x - 16 = 0$;

Ответ. 1) Проходит через начало координат;
2) параллельна оси Ox;
3) параллельна оси Oy;
4) совпадает с осью Ox;
5) совпадает с осью Oy.

Задача 3, 15. Уравнение прямой $x + 3y - 4 = 0$ привести к нормальному виду.

Решение. Нормирующий множитель определяется по формуле

$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Здесь $A = 1$; $B = 3$. Перед корнем надо выбрать знак, противоположный знаку свободного члена в заданном уравнении, т. е. знак плюс. Тогда нормирующий множитель

$$N = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}}; \quad N = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

после умножения обеих частей уравнения на N уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0.$$

Задача 3, 16. Привести к нормальному виду уравнение прямой $5x-12y+26=0$.

Ответ. $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$.

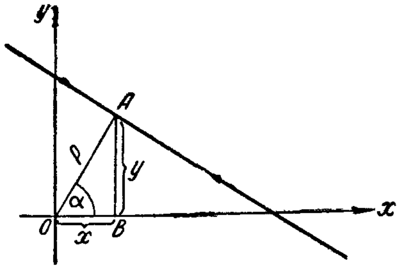
Из сравнения с уравнением (3, 4) видим, что $p=2$; $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$; $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

Задача 3, 17 (для самостоятельного решения). Уравнение прямой $7x+y-3=0$ привести к нормальному виду.

Ответ. $\frac{7}{5\sqrt{2}}x+\frac{1}{5\sqrt{2}}y-\frac{3}{5\sqrt{2}}=0$;

$$p=\frac{3}{5\sqrt{2}};\quad \cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$



Фиг. 3,9.

Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение прямой $6x-8y-15=0$.

Ответ. $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1{,}5=0$; $p=1{,}5$; $\cos\alpha=\frac{3}{5}$;

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Задача 3, 19. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $3x-6y+5=0$, а также координаты основания этого перпендикуляра.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду:

$$N=-\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2}},\quad N=-\frac{1}{\sqrt{45}}=-\frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

После умножения на нормирующий множитель уравнение примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{\sqrt{5}}{3}=0.$$

Из сравнения с (3, 4) заключаем, что $p=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Для определения координат основания этого перпендикуляра из фиг. 3, 9 получим формулы

$$x=p\cos\alpha,$$

$$y=p\sin\alpha$$

(эти формулы верны при любом расположении прямой относительно координатных осей).

Как видно из уравнения (3, 4), $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и искомые координаты основания перпендикуляра равны

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}.$$

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Определение точки пересечения двух прямых.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k,

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4, 1}$$

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, которая называется центром пучка.

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, записывается так:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4, 2}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4, 3}$$

3. Углом между прямыми a и b называется угол, на который надо повернуть первую прямую a вокруг точки пересечения этих прямых против движения часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой b.

Если две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2, \tag{4, 4}$$

то угол между ними θ определится по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{4, 5}$$