тив часовой стрелки вокруг точки B до совпадения ее с данной прямой:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) k_2}; \quad \sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 - \frac{2}{3} k_2}; \quad k_2 = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 4, 19. Через центр тяжести треугольника, вершины которого $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 5)$, провести прямую, параллельную стороне AC, и прямую, перпендикулярную стороне AB.

Решение. Прежде всего определим координаты центра тяжести M треугольника. Известно, что каждая координата центра тяжести площади треугольника есть средняя арифметическая одноименных координат его вершин. Значит, если вершины треугольника имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), то координаты его центра тяжести x_C и y_C будут

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

В нашем случае

$$x_C = \frac{2 + (-1) + 5}{3} = 2,$$

$$y_C = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4.$$

Центр тяжести треугольника M имеет координаты $(2, 4)$. Уравнение стороны AB будет $x + 3y - 11 = 0$; уравнение стороны AC будет $2x - 3y + 5 = 0$ (мы нашли эти уравнения, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки).

Теперь так же, как в задачах 4, 7 и 4, 9, определим уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно стороне AC и перпендикулярно стороне AB. Получим соответственно

$$2x - 3y + 8 = 0 \text{ и } 3x - y - 2 = 0.$$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Расстояние от даниой точки до данной прямой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Расстояние точки A (x_1, y_1) до прямой $Ax + By + C = 0$ есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Она определяется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \tag{5, 1}$$

Правило. *Чтобы определить расстояние от точки $A(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$, нужно привести уравнение прямой к нормальному виду, взять левую часть полученного уравнения и подставить в нее вместо текущих координат координаты данной точки. Абсолютная величина полученного числа и даст искомое расстояние.*

Расстояние от точки до прямой есть всегда величина положительная. Кроме расстояния от точки до прямой, рассматривается еще так называемое отклонение точки от прямой.

Отклонение δ данной точки от данной прямой есть расстояние от этой точки до прямой, которому приписывается знак плюс, если точка и начало координат находятся по разные стороны от прямой, и знак минус, если точка и начало координат находятся по одну сторону от прямой (см. учебник И. И. Привалова, гл. III, § 16, или § 22 учебника Н. В. Ефимова).

Расстояние от точки до прямой есть абсолютная величина отклонения этой точки от прямой.

Задача 5, 1. Найти расстояние от начала координат до прямой $x+y-2=0$ (см. также задачу 3, 19).

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \qquad N=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В нормальном виде уравнение прямой запишется так:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0.$$

Свободный член в нормальном уравнении прямой, взятый по абсолютной величине, дает искомое расстояние $p=\sqrt{2}$ ед. масштаба.

Задача 5, 2. Найти расстояние от точки (2, 5) до прямой

$$6x+8y-5=0.$$

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

Уравнение прямой в нормальном виде запишется так:

$$\frac{6x+8y-5}{10}=0.$$

Согласно правилу стр. 47, возьмем теперь левую часть этого уравнения $\frac{6x+8y-5}{10}$ и подставим в нее координаты данной точки. Абсолютная величина полученного числа и даст искомое расстояние

$$d = \left|\frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 5}{10}\right| = 4{,}7 \text{ ед. масштаба.}$$

Итак, $d = 4{,}7$ ед. масштаба.

Задача 5, 3 (для самостоятельного решения).

Найти расстояние от точки $(3, -1)$ до прямой $3x + 5y + 8 = 0$.

Ответ. $d = \frac{6}{17}\sqrt{34}$ ед. масштаба.

Задача 5, 4. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$3x + 4y - 12 = 0,$$

$$3x + 4y + 13 = 0.$$

Решение. Искомое расстояние мы найдем, как расстояние от произвольной точки первой прямой до второй прямой. Возьмем на первой прямой произвольную точку, например, точку с абсциссой $x = 0$. Ее ордината будет $y = 3$.

Итак, на первой прямой выбрана точка $A\,(0{,}3)$. Найдем теперь расстояние этой точки до второй прямой так же, как и в задачах 5, 2 и 5, 3, и получим

$$d = 5 \text{ ед. масштаба.}$$

Задача 5, 5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-4, 3)$ и удаленной от начала координат на расстояние 5 ед. масштаба.

Решение. Уравнение искомой прямой, как проходящей через точку $(-4, 3)$, запишется на основании уравнения (4, 1) в виде

$$y - 3 = k\,(x + 4).$$

После упрощений оно примет вид

$$kx - y + (4k + 3) = 0.$$

Теперь приведем его к нормальному виду. Нормирующий множитель будет равен

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

и уравнение в нормальном виде будет выглядеть так:

$$\frac{k}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\,x + \frac{1}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\,y + \frac{4k + 3}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с нормальным уравнением прямой, видим, что прямая удалена от начала координат на величину

$$p = \frac{|4k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

которая по условию равна 5. Значит, для определения k получаем такое уравнение

$$\frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=5,$$

а после возведения в квадрат обеих частей этого уравнения для определения k будем иметь квадратное уравнение

$$9k^2-24k+16=0,$$

откуда

$$k_1=k_2=\frac{4}{3}.$$

Следовательно, искомое уравнение запишется так:

$$y-3=\frac{4}{3}(x+4),$$

и после упрощений получаем

$$4x-3y+25=0.$$

Задача 5, 6. Через точку $(-1, 2)$ провести прямую, расстояние которой от точки $(3, -1)$ равно 2 ед. масштаба.

Решение. Уравнение искомой прямой, как прямой, проходящей через точку $(-1, 2)$, запишется так:

$$y-2=k(x+1), \text{ или } kx-y+(k+2)=0. \qquad (A)$$

Приведем его к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

После приведения уравнения (A) к нормальному виду оно запишется в виде

$$\frac{kx-y+(k+2)}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Вспомним теперь, что расстояние между точкой и прямой определяется по формуле

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

В нашем случае следует определить расстояние от точки $(3, -1)$ до прямой. У нас $x_1=3$; $y_1=-1$; $d=2$; подставляя эти значения в предыдущую формулу, будем иметь

$$2=\left|\frac{3k+1+k+2}{\sqrt{1+k^2}}\right|; \qquad 2=\frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}},$$

или

$$2\sqrt{1+k^2}=|4k+3|, \quad 4(1+k^2)=16k^2+24k+9,$$

и для определения k получаем уравнение

$$12k^2 + 24k + 5 = 0,$$

откуда находим, что

$$k_1 = \frac{-6+\sqrt{21}}{6}, \quad k_2 = \frac{-6-\sqrt{21}}{6}.$$

Подставляя эти значения в (A), заключаем, что есть две прямые, удсвлетворяющие условию задачи:

$$1)\ y-2 = \frac{-6+\sqrt{21}}{6}(x+1);$$

$$2)\ y-2 = \frac{-6-\sqrt{21}}{6}(x+1).$$

Задача 5, 7. Через точку $M_1(1, 2)$ провести прямую, расстояния до которой от точек $M_2(2, 3)$ и $M_3(4, -5)$ были бы равны.

Решение. Так как искомая прямая проходит через точку $M_1(1, 2)$, то ее уравнение запишется так:

$$y-2 = k(x-1), \tag{B}$$

или

$$kx - y - k + 2 = 0,$$

а после приведения его к нормальному виду

$$\frac{kx-y-k+2}{\pm\sqrt{1+k^2}} = 0.$$

Используя формулу (5, 1) для длины перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, и подставляя в нее сначала координаты точки M_2: $x_2 = 2$; $y_2 = 3$, а потом координаты точки M_3: $x_3 = 4$; $y_3 = -5$, получим

$$d_1 = \left|\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}}\right|, \quad d_2 = \left|\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}\right|.$$

По условию $d_1 = d_2$, а отсюда следует, что имеют место два равенства:

$$\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}} \text{ и } \frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}} = -\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Из первого $k = -4$, а из второго $k = \frac{2}{3}$. Итак, искомых прямых две, и уравнения их получим из (B), подставляя в него сначала $k = -4$, а потом $k = -\frac{3}{2}$.

Искомые прямые: $4x + y - 6 = 0$ и $3x + 2y - 7 = 0$.

Задача 5, 8. Дана прямая $4x + 3y + 1 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на 3 ед. масштаба.

Решение. Очевидно, что искомых прямых будет две. Отклонение δ точек одной из искомых прямых от данной будет равно $+3$, а другой -3; $\delta = \pm 3$.

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, будет таким:

$$4x + 3y + C = 0.$$

Из этого семейства требуется отобрать две искомые прямые. После приведения его к нормальному виду получим

$$\frac{4x + 3y + C}{\pm 5} = 0$$

(два знака в знаменателе мы удерживаем пока потому, что знак C нам неизвестен). Возьмем на данной прямой произвольную точку, например, $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Подставим ее координаты в левую часть последнего уравнения и, учитывая, что отклонение точек данной прямой от искомых равно ± 3, для определения C получим уравнения

$$\pm 3 = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + C}{\pm 5}, \quad \text{откуда} \quad \pm 3 = \frac{C - 1^{*}}{\pm 5}.$$

На основании этого $C_1 = 16$, $C_2 = -14$. Подставляя эти значения C в уравнение семейства прямых $4x + 3y + C = 0$, получим, что искомых прямых две:

$$4x + 3y + 16 = 0 \text{ и } 4x + 3y - 14 = 0.$$

Решение допускает простую проверку, которую рекомендуется сделать.

Задача 5, 9 (для самостоятельного решения). Уравнения сторон треугольника ABC известны:

$$(AB)\ x + y - 1 = 0,$$
$$(AC)\ 2x - y - 5 = 0,$$
$$(BC)\ 3x + y = 0.$$

Найти длины высот этого треугольника и их уравнения.

Указание. Определить координаты вершин треугольника и воспользоваться формулой для определения расстояния от точки до прямой.

---

* Четыре случая: $3 = \frac{C-1}{5}$; $3 = \frac{C-1}{-5}$; $-3 = \frac{C-1}{5}$; $-3 = \frac{C-1}{-5}$ сводятся к двум: 1) $\frac{C-1}{5} = 3$; 2) $\frac{C-1}{5} = -3$, откуда $C_1 = 16$; $C_2 = -14$.

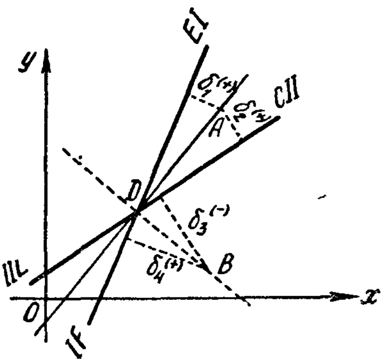
Ответ. Уравнение высоты h_{BC} $x-3y-5=0$;
уравнение высоты h_{AC} $2x+4y-5=0$;
уравнение высоты h_{AB} $x-y-4=0$;

$$h_{BC}=\frac{\sqrt{10}}{2};\quad h_{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{2};\quad h_{AB}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми. Задачи повышенной трудности.

На этом практическом занятии мы будем решать задачи повышенной трудности, однако такие, которые не потребуют каких-либо дополнительных сведений из теории прямой линии. Научимся прежде всего находить уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми.



Фиг. 6,1.

Задача 6, 1. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $12x+9y-17=0$ и $3x+4y+11=0$.

Решение*. Приведем подробное решение этой задачи. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла между двумя прямыми есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Обратимся к фиг. 6, 1. Отклонения δ_1 и δ_2 точки A биссектрисы от сторон угла CDE имеют знак плюс, так как точка A и начало координат лежат по разные стороны как от первой, так и от второй прямой, т. е. $\delta_1=\delta_2$. Возьмем точку B на биссектрисе смежного угла CDF. Точка B и начало координат лежат по разные стороны от прямой EF, поэтому отклонение δ_4 имеет знак плюс ($\delta_4>0$). Отклонение δ_3 точки B от прямой CL имеет знак минус, так как точка B и начало координат лежат с одной и той же стороны от прямой CL, т. е. $\delta_3<0$. Значит, δ_3 и δ_4 в этом случае равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, и имеет место равенство

$$\delta_3=-\delta_4.$$

* Прежде чем решать эту задачу, еще раз повторите рассуждения о знаке отклонения точки от прямой по учебнику Н. В. Ефимова (§ 67) или по учебнику И. И. Привалова (§ 16, гл. III).