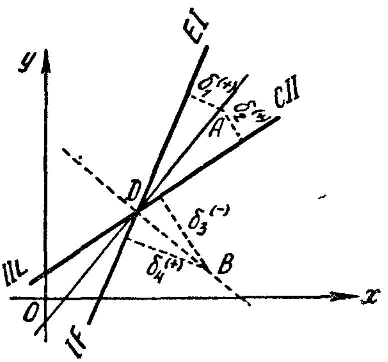
Ответ. Уравнение высоты h_{BC} $x - 3y - 5 = 0$;
уравнение высоты h_{AC} $2x + 4y - 5 = 0$;
уравнение высоты h_{AB} $x - y - 4 = 0$;

$$h_{BC} = \frac{\sqrt{10}}{2}; \quad h_{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}; \quad h_{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми. Задачи повышенной трудности.

На этом практическом занятии мы будем решать задачи повышенной трудности, однако такие, которые не потребуют каких-либо дополнительных сведений из теории прямой линии. Научимся прежде всего находить уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми.



Фиг. 6,1.

Задача 6, 1. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $12x + 9y - 17 = 0$ и $3x + 4y + 11 = 0$.

Решение*. Приведем подробное решение этой задачи. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла между двумя прямыми есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Обратимся к фиг. 6, 1. Отклонения δ_1 и δ_2 точки A биссектрисы от сторон угла CDE имеют знак плюс, так как точка A и начало координат лежат по разные стороны как от первой, так и от второй прямой, т. е. $\delta_1 = \delta_2$. Возьмем точку B на биссектрисе смежного угла CDF. Точка B и начало координат лежат по разные стороны от прямой EF, поэтому отклонение δ_4 имеет знак плюс ($\delta_4 > 0$). Отклонение δ_3 точки B от прямой CL имеет знак минус, так как точка B и начало координат лежат с одной и той же стороны от прямой CL, т. е. $\delta_3 < 0$. Значит, δ_3 и δ_4 в этом случае равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, и имеет место равенство

$$\delta_3 = -\delta_4.$$

---

* Прежде чем решать эту задачу, еще раз повторите рассуждения о знаке отклонения точки от прямой по учебнику Н. В. Ефимова (§ 67) или по учебнику И. И. Привалова (§ 16, гл. III).

Обозначим через X и Y текущие координаты точки на биссектрисе и рассмотрим отклонения этой точки от сторон угла. Для биссектрисы одного угла эти отклонения равны, а для биссектрисы смежного угла они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Пусть уравнения сторон угла имеют вид

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Приведем эти уравнения к нормальному виду, и тогда, для случая, когда $\delta_1 = \delta_2$, уравнение биссектрисы будет иметь вид

$$\frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (A)$$

Для случая же $\delta_3 = -\delta_4$ уравнение биссектрисы получим в виде

$$\frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B^2}}. \qquad (B)$$

Замечание. При решении задачи нет надобности обозначать текущие координаты точки на биссектрисе через X и Y. Их можно обозначить через x и y, так как это не меняет этих уравнений.

Объединяя уравнения (A) и (B) и используя только что сделанное замечание, будем иметь уравнения двух биссектрис в виде

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Теперь решение нашей задачи не составит труда.

Для нашего случая уравнения биссектрис запишутся так:

$$\frac{12x + 9y - 17}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \pm\frac{3x + 4y + 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}},$$

или

$$\frac{12x + 9y - 17}{15} = +\frac{3x + 4y + 11}{5}$$

и

$$\frac{12x + 9y - 17}{15} = -\frac{3x + 4y + 11}{5}.$$

Окончательно уравнения биссектрис получаем в виде

$$21x + 21y + 16 = 0,$$

$$3x - 3y - 50 = 0.$$

Легко проверить, что найденные две биссектрисы перпендикулярны. Действительно, условие перпендикулярности двух прямых $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ выполняется (проверьте!)*.

* На этом примере мы получили подтверждение известной из геометрии теоремы: биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

Задача 6, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми

$$4x+2y+7=0 \text{ и } 2x-4y+15=0.$$

О т в е т. Уравнение биссектрис получаем в виде

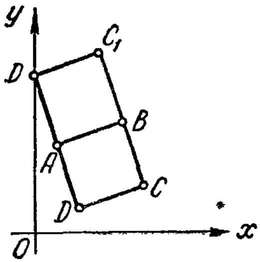
$$\frac{4x+2y+7}{\sqrt{20}}=\pm\frac{2x-4y+15}{\sqrt{20}}.$$

После упрощений получаем уравнения биссектрис в виде

$$x+3y-4=0,$$

$$3x- \quad +11=0.$$

Задача 6, 3 (для самостоятельного решения). Найти уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, заданного вершинами



Фиг. 6,2.

$$A\,(0,0);\ B\,(3,-1);\ C\,(4,7).$$

У к а з а н и е. Найдите сначала уравнения сторон треугольника. Получите такие уравнения:

$$(AB)\ x+3y=0,\quad (AC)\ 7x-4y=0,$$

$$(BC)\ 8x-y-25=0.$$

Уравнение биссектрисы угла A: $(7\sqrt{10}-\sqrt{65})x-(4\sqrt{10}+3\sqrt{65})y=0.$

Уравнение биссектрисы угла B: $(8\sqrt{10}+\sqrt{65})\,x+(3\sqrt{65}-\sqrt{10})\,y-25\sqrt{10}=0.$

Уравнение биссектрисы угла C: $3x-y-5=0.$

Задача 6, 4. Даны две смежные вершины квадрата $A\,(1,4)$ и $B\,(4,5)$. Найти две другие (фиг. 6, 2).

Р е ш е н и е. Очевидно, что задача допускает два решения, так как искомые вершины могут находиться по разные стороны отрезка AB. Уравнение стороны квадрата AB будет таким: $x-3y+11=0$, а ее длина равна $\sqrt{10}$. Теперь через точки A (1, 4) и B (4, 5) проведем прямые, перпендикулярные AB, и на каждой из этих прямых определим по две точки, расстояние которых от AB равно $\sqrt{10}$ (у квадрата все стороны равны). Координаты этих точек и будут искомыми.

Уравнения прямых, перпендикулярных к AB и проходящих через концы отрезка AB, будут такими:

$$(AD)\ 3x+y-7=0,\ (BC)\ 3x+y-17=0.$$

На каждой из этих прямых найдем две точки, находящиеся от AB на расстоянии, равном $\sqrt{10}$, причем для одной из точек отклонение от AB будет положительным, для другой — отрицательным.

Обозначим координаты точки D через x_1 и y_1. Так как эта точка лежит на прямой AD, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т. е. имеет место уравнение

$$3x_1 + y_1 - 7 = 0. \qquad (A)$$

Второе уравнение, связывающее x_1 и y_1, найдем, определяя отклонение этой точки от прямой AB. Приведя уравнение AB к нормальному виду и взяв отклонение равным $\pm\sqrt{10}$, получим

$$\pm\sqrt{10} = \frac{x_1 - 3y_1 + 11}{-\sqrt{10}},$$

а отсюда будем иметь два уравнения:

$$x_1 - 3y_1 + 1 = 0 \text{ и } x_1 - 3y_1 + 21 = 0.$$

Объединяя каждое из этих уравнений с уравнением (A), получим две системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + y_1 - 7 = 0 \\ x_1 - 3y_1 + 1 = 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} 3x_1 + y_1 - 7 = 0 \\ x_1 - 3y_1 + 21 = 0 \end{array}\right\}.$$

Из первой системы уравнений $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; из второй — $x_1 = 0$; $y_1 = 7$. Таким образом, вершина D может иметь координаты $(0, 7)$ или $(2, 1)$.

Точно так же найдем, что четвертая вершина C квадрата может иметь координаты $(5, 2)$ или $(3, 8)$

Эту задачу можно решить и иначе. Используйте указания, которые даются ниже, и самостоятельно решите задачу другим способом:

1) Найдите длину d стороны AB.

2) Диагональ квадрата BD будет равна $d\sqrt{2}$.

3) Напишите формулу для определения расстояния от точки D до точки A и от точки D до точки B. Вы получите два уравнения, из которых и определятся координаты точки D.

4) Найдите координаты средины диагонали BD.

5) Зная координаты этой точки и координаты точки A, пользуясь формулами для определения координат точки, делящей отрезок пополам, определите и координаты точки C.

Задача 6, 5. Найти уравнение прямой, параллельной прямой

$$2x + 3y + 6 = 0$$

и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. единицам.

Решение. Обозначим отрезки, отсекаемые искомой прямой на координатных осях Ox и Oy, соответственно через a и b. Тогда имеем

$$3 = \frac{1}{2}ab, \text{ или } ab = 6. \qquad (A)$$

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, запишется в виде $2x + 3y + C = 0$. Отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат, равны

$$a = -\frac{C}{2}, \quad b = -\frac{C}{3}.$$

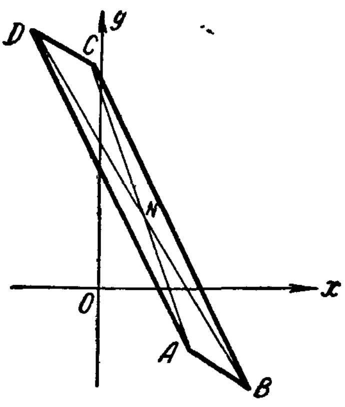
Подставляя a и b в (A), получим

$$\left(-\frac{C}{2}\right)\left(-\frac{C}{3}\right) = 6,$$

откуда

$$\frac{C^2}{6} = 6, \quad C^2 = 36, \quad C_1 = 6, \quad C_2 = -6,$$

и искомая прямая имеет уравнение $2x + 3y + 6 = 0$, или $2x + 3y - 6 = 0$. Среди только что найденных прямых есть данная: $2x + 3y + 6 = 0$. Таким образом, данная прямая удовлетворяет требованию задачи; этому требованию удовлетворяет также и найденная прямая $2x + 3y - 6 = 0$.



Фиг. 6,3.

Задача 6, 6. Даны уравнения двух сторон параллелограмма

$$x + 2y + 1 = 0 \quad (AB)$$
$$2x + y - 3 = 0 \quad (AD)$$

и точка пересечения его диагоналей $N(1, 2)$. Найти уравнения двух других сторон этого параллелограмма (фиг. 6, 3).

При решении, замечая, что данные стороны параллелограмма не параллельны, будем следовать такому плану:

1) найдем координаты точки A пересечения данных сторон;

2) зная координаты точек A и N, найдем координаты точки C, что мы легко сможем сделать по формуле определения координат средины отрезка;

3) через найденную точку C проведем сначала прямую, параллельную AD, а потом прямую, параллельную AB.

4) Определим координаты точки A, как точки пересечения прямых AB и AD, и получим, что

$$x_A = \frac{7}{3}; \quad y_A = -\frac{5}{3},$$

т. е.

$$A\left(\frac{7}{3}; \ -\frac{5}{3}\right).$$

5) Формулы для определения координат средины отрезка в данном случае запишутся так:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

По этим формулам получим

$$x_C = -\frac{1}{3}, \quad y_C = \frac{17}{3}.$$

Итак, точка $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

6) Через точку C проведем прямую, параллельную AD, и получим, что уравнение стороны BC будет таким:

$$2x + y - 5 = 0.$$

Уравнение стороны CD

$$x + 2y - 11 = 0.$$

Задача 6, 7. Найти координаты точки P, равноудаленной от точек $M_1(4, -3)$ и $M_2(2, -1)$ и отстоящей от прямой $2x + y - 1 = 0$ на расстоянии, равном 2 ед. масштаба.

Указание. Обозначим координаты искомой точки P через x_1 и y_1; из условия, что $M_1P = M_2P$, получаем

$$x_1 - y_1 = 5.$$

Это первая зависимость между x_1 и y_1. Вторую же зависимость между ними найдем из условия, что искомая точка находится на расстоянии 2 ед. масштаба от прямой $2x + y - 1 = 0$; получим

$$2 = \frac{2x_1 + y_1 - 1}{\pm\sqrt{5}}.$$

Отсюда два уравнения, связывающие x_1 и y_1, имеют вид

$$2x_1 + y_1 - 1 - 2\sqrt{5} = 0,$$

или

$$2x_1 + y_1 - 1 + 2\sqrt{5} = 0.$$

Каждое из этих уравнений следует решить совместно с ранее полученным уравнением $x_1 - y_1 = 5$. Задача допускает два решения:

$$x_1 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{5};$$

$$y_1 = -3 + \frac{2}{3}\sqrt{5},$$

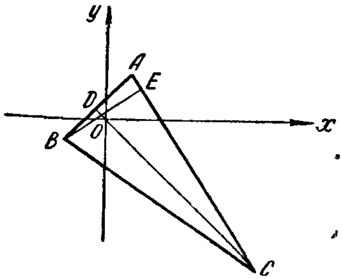
или

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}; \qquad y_1 = -3 - \frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

Задача 6, 8. Даны уравнения высот треугольника $2x-3y+1=0$ и $x+y=0$ и координаты одной из его вершин $A(1, 2)$. Найти уравнения сторон треугольника.

Решение. Точка $A(1, 2)$ не принадлежит данным в условии высотам треугольника, так как ее координаты не удовлетворяют их уравнениям: $2\cdot 1-3\cdot 2+1\neq 0$ и $1+2\neq 0$. Отсюда следует, что высоты, данные в задаче, проведены из двух других вершин треугольника B и C (фиг. 6, 4).

Назовем их CD и BE, $CD\perp AB$, $BE\perp AC$. Пусть высота CD имеет уравнение $x+y=0$, а уравнение высоты BE $2x-3y+1=0$. Так как $AC\perp BE$, то уравнение AC мы найдем из уравнения семейства прямых, перпендикулярных BE, приняв во внимание, что искомая прямая проходит через данную точку $A(1, 2)$.



Фиг. 6,4.

Сторона AC имеет уравнение $3x+2y-7=0$. Уравнение прямой AB найдем, как уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно CD. Оно имеет вид

$$x-y+1=0.$$

Теперь следует найти координаты точек B и C:

$$x_B=-2;\quad y_B=-1;$$

$$x_C=7;\quad y_C=-7.$$

Уравнение стороны BC $2x+3y+7=0$.

Таким образом, уравнения всех трех сторон треугольника найдены.

Задача 6, 9 (для самостоятельного решения). Даны две вершины треугольника $A(2, 1)$ и $B(4, 9)$ и точка пересечения его высот $N(3, 4)$. Найти уравнение сторон треугольника.

Ответ.

$$(AB)\quad 4x-y-7=0,$$

$$(BC)\quad x+3y-31=0,$$

$$(AC)\quad x+5y-7=0.$$

Задача 6. 10 (для самостоятельного решения). Даны координаты средин сторон треугольника — $A(1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(3, -4)$. Найти уравнения сторон треугольника (фиг. 6,5).

Ответ. 1) $2x-y=0$; 3) $x-3y-15=0$.

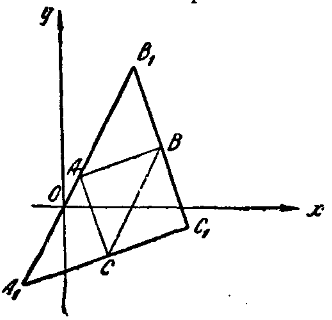
2) $3x+y-25=0$;

Задача 6, 11. Даны уравнения сторон треугольника $x+y-1=0$ (AB) и $y+1=0$ (BC) и точка $N(-1, 0)$ пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны AC (фиг. 6, 6).

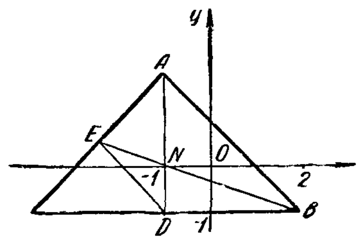
Ответ. $x-y+3=0$.

Решение задач, которыми заканчиваются упражнения, по теме «Прямая линия», связано с уравнением пучка прямых. Перед решением этих задач следует изучить § 23 из учебника Н. В. Ефимова или § 11 главы III учебника И. И. Привалова.

Задача 6, 12. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-y-1=0$ и $x+2y-2=0$ и точку $M(-1, 1)$, не находя точки пересечения данных прямых



Фиг. 6,5.



Фиг. 6,6.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$, записывается так:

$$Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0; \qquad (6, 1)$$

в нашем случае оно будет иметь вид

$$x-y-1+\lambda(x+2y-2)=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка надо выделить прямую, проходящую через гочку $M(-1, 1)$. Подставляя в уравнение (A) координаты точки M вместо текущих координат, получим $\lambda=-3$.

Подставив это значение λ в уравнение (A), будем иметь $x-y-1-3(x+2y-2)=0$.

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, находим уравнение искомой прямой

$$2x+7y-5=0.$$

Задача 6, 13. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $x+y-1=0$ и $x+2y+1=0$ и отсекает на отрицательной части оси Oy отрезок в 2 ед. масштаба.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых, имеет вид (6, 1).

В нашем случае оно запишется так:

$$x+y-1+\lambda(x+2y+1)=0. \qquad (B)$$

Так как прямая на отрицательной части оси Oy отсекает отрезок в 2 ед. масштаба, то прямая проходит через точку $(0, -2)$. Подставляя координаты этой точки вместо текущих координат в (B), получим $\lambda=-1$, а уравнение искомой прямой будет иметь вид

$$y+2=0.$$

Задача 6, 14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-11=0$ и $2x-y-2=0$ на расстоянии 5 ед. масштаба от начала координат.

Решение. Уравнение пучка прямых с центром пучка в точке пересечения данных прямых имеет вид $x+2y-11+\lambda(2x-y-2)=0$, или

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-(11+2\lambda)=0. \qquad (A)$$

Нормирующий множитель равен

$$N=\frac{1}{\pm\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}.$$

Умножая на нормирующий множитель уравнение (A) и принимая во внимание, что в нормальном уравнении прямой абсолютная величина свободного члена равна расстоянию прямой от начала координат, для определения λ получаем уравнение

$$\frac{|11+2\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda^2+(2-\lambda)^2}}=5, \text{ откуда } \lambda=\frac{2}{11}.$$

Искомое уравнение: $3x+4y-25=0$.

Задача 6, 15 (для самостоятельного решения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x+5y+8=0$ и $3x-4y-7=0$ под углом в 45° к прямой $y=4x+3$.

Ответ. $69x-115y-199=0$ и $115x+69y+99=0$.

Задача 6, 16 (для самостоятельного решения). Через точку $M(1, -1)$ провести прямую так, чтобы средина ее отрезка между параллельными прямыми $x+2y-1=0$ (I) и $x+2y-3=0$ (II) лежала на прямой $x-y-1=0$ (фиг. 6, 7).

Ответ. $4x-y-5=0$.

Задача 6, 17 (для самостоятельного решения). Луч света, проходящий через точку $C(2,3)$, отражается от прямой (AB) $x+y+1=0$ и проходит после этого через точку $(1,1)$. Найти уравнения падающего и отраженного лучей (фиг. 6, 8).

Ответ. Уравнение падающего луча

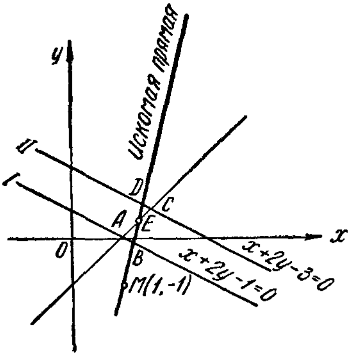
$$5x-4y+2=0;$$

уравнение отраженного луча

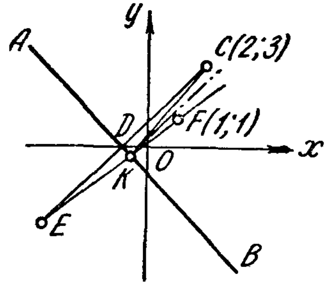
$$4x - 5y + 1 = 0.$$

Задача 6,18 (для самостоятельного решения). Луч света, проходящий через точку $C(1,2)$, отражается от прямой (AB) $x + 5y + 1 = 0$ и проходит через точку $F(-1,3)$.

Найти уравнение луча падающего и отраженного.



Фиг. 6,7.



Фиг. 6,8.

Ответ. Уравнение отраженного луча

$$73x + 14y + 31 = 0;$$

уравнение падающего луча

$$62x - 41y + 20 = 0.$$

Этим мы заканчиваем упражнения, связанные с теорией прямой линии на плоскости.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Полярная система координат. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Построение кривой, определяемой уравнением в полярных координатах.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается полярной системе координат, упражнениям на переход от декартовой системы координат к полярной и обратно, а также на построение кривой по ее уравнению в полярных координатах.

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка O — полюс и ось OP, которая называется полярной осью.