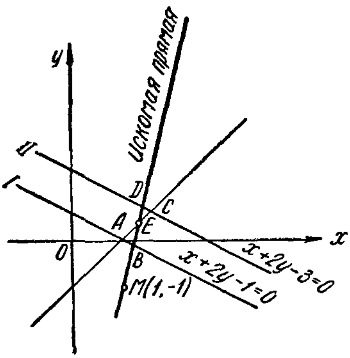
уравнение отраженного луча

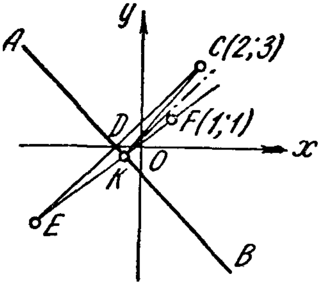
$$4x - 5y + 1 = 0.$$

Задача 6,18 (для самостоятельного решения). Луч света, проходящий через точку $C(1,2)$, отражается от прямой (AB) $x + 5y + 1 = 0$ и проходит через точку $F(-1,3)$.

Найти уравнение луча падающего и отраженного.



Фиг. 6,7.



Фиг. 6,8.

Ответ. Уравнение отраженного луча

$$73x + 14y + 31 = 0;$$

уравнение падающего луча

$$62x - 41y + 20 = 0.$$

Этим мы заканчиваем упражнения, связанные с теорией прямой линии на плоскости.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Полярная система координат. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Построение кривой, определяемой уравнением в полярных координатах.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается полярной системе координат, упражнениям на переход от декартовой системы координат к полярной и обратно, а также на построение кривой по ее уравнению в полярных координатах.

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка O — полюс и ось OP, которая называется полярной осью.

Если M — произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом O, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: r — ее расстояния от полюса, выраженного в ед. масштаба, и φ — угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом OM. Числа r и φ называются полярными координатами точки M. Из них первой координатой считается r, а второй φ. Координата r называется полярным радиусом точки M (иногда радиусом-вектором точки M), а координата φ — ее полярным углом*. Полярные координаты точки записываются в скобках справа от обозначения ее, причем на первом месте в скобках записывается координата r, а на втором — координата φ, например, $M(r, \varphi)$. Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

В определенной таким образом полярной системе координат полярный радиус r — всегда величина положительная или равная нулю ($r \geqslant 0$), так как под r понимается расстояние от полюса O до точки M, а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

Однако на практике удобнее пользоваться такой системой полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать и отрицательные значения. Система полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется **обобщенной** системой полярных координат. Этой системой мы и будем пользоваться.

Если точка M имеет координаты $+r$ и φ: $M(+r, \varphi)$, то она имеет также и координаты $-r$ и $\varphi+\pi$; $M(-r, \varphi+\pi)$, так как угол $\varphi+\pi$ характеризует направление полярного радиуса, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ (см. задачи 7,3 и 7,4).

Отметим, что какой бы из этих двух систем полярных координат мы ни пользовались, всегда паре чисел r и φ соответствует на плоскости единственная точка.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, ось же Oy перпендикулярна оси Ox и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты x и y вычисляются из формул

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi^{**}. \tag{7, 1}$$

---

* Полярный угол измеряется в радианах.

** Везде в дальнейшем, если не будет оговорено, предполагается именно такое расположение полярной и прямоугольной систем координат.

Если же известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad (7,2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (7,3)$$

Как видно из (7, 2), у корня в формуле для определения r стоят два знака — плюс и минус, что соответствует обобщенной системе полярных координат, а потому и в формулах для определения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ перед корнем стоят два знака (рекомендуется ознакомиться в учебнике И. И. Привалова с замечанием к § 11, гл. 1). Два знака в формуле для определения r появились потому, что r находится из выражения $r^2 = x^2 + y^2$. Если за r оставляется право быть только величиной положительной или нулем, то $r = +\sqrt{x^2+y^2}$. Если же r, как это имеет место в обобщенной системе полярных координат, может быть и отрицательной величиной, то из $r^2 = x^2 + y^2$ следует, что $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

В заключение укажем, как вести вычисления по формулам (7, 2), чтобы по известным прямоугольным координатам точки найти ее полярные координаты. Прежде всего следует определить r, выбрав перед корнем любой знак, затем вычислить $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, сохранив перед корнем в формулах (7, 2) уже выбранный знак, и по знакам $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ установить четверть, в которой находится полярный угол φ. Само вычисление угла φ по таблицам тригонометрических функций следует вести по формуле (7, 3).

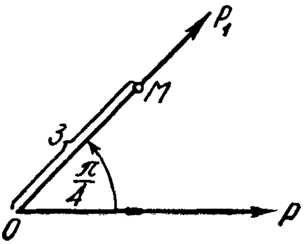
Укажем также, как следует в полярной системе координат построить точку M по ее полярным координатам r и φ. По заданному полярному углу φ строим ось, проходящую через полюс под углом φ к полярной оси, причем положительное направление построенной оси должно совпадать с тем направлением, которое имела бы полярная ось, если бы ее повернули против часовой стрелки на угол φ. На этой оси откладываем отрезок длиной $|r|$ от полюса O в положительном направлении построенной оси, если $r > 0$, и в отрицательном — если $r < 0$.

Задача 7, 1. Построить точку M с координатами $\left(3, +\frac{\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат (фиг. 7, 1).

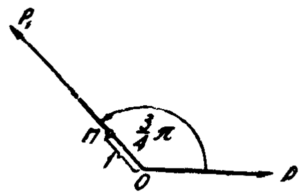
Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{\pi}{4}$ к полярной оси OP (положительное направление указано стрелкой) и отложим от полюса в положительном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный трем единицам масштаба. Конец M этого отрезка и будет искомой точкой.

Задача 7, 2. Построить в полярной системе координат точку $M\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{3\pi}{4}$ к полярной оси (положительное направление указано стрелкой на фиг. 7, 2) и отложим от полюса в положительном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный одной ед. масштаба. Конец этого отрезка M и будет искомой точкой



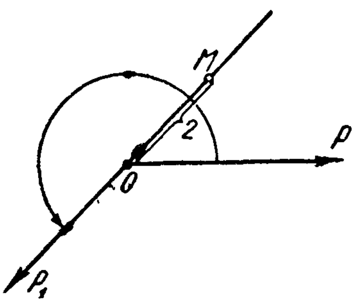
Фиг. 7,1.



Фиг. 7,2.

Задача 7, 3. Построить в полярной системе координат точку $M\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{5}{4}\pi$ к полярной оси (положительное направление на ней указано стрелкой на фиг. 7, 3) и отложим от полюса в отрицательном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный двум ед. масшт. Конец этого отрезка и будет искомой точкой.



Фиг. 7,3.

Задача 7, 4 (для самостоятельного решения). В полярной системе координат построить точку $\left(-4, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 5. Прямоугольные координаты точки $A(2, 3)$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По формулам (7, 2) получаем $r = \pm\sqrt{13}$. Выбираем по нашему усмотрению знак перед корнем, например, плюс. Тогда $r = +\sqrt{13}$, $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Так как $\sin\varphi > 0$ и $\cos\varphi > 0$, то угол φ находится в первой четверти. На основании формулы (7, 3) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}$; по таблицам находим, что $\varphi = 0{,}98$. Полярные координаты точки A найдены. $r = \sqrt{13}$, $\varphi = 0{,}98$ или $A(\sqrt{13};\ 0{,}98)$. Постройте точку. Если бы перед корнем был выбран знак минус, то тогда $r = -\sqrt{13}$; $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, и так как $\sin\varphi < 0$ и $\cos\varphi < 0$, то угол φ находится в третьей четверти. Зная, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}$, получаем $\varphi = 4{,}12$, а точка A имеет полярные координаты $r = -\sqrt{13}$, $\varphi = 4{,}12$: $A(-\sqrt{13},\ 4{,}12)$. Постройте точку по этим координатам и убедитесь, что она совпала с ранее построенной.

Задача 7, 6 (для самостоятельного решения). Найти полярные координаты точки A, прямоугольные координаты которой $(-1,\ -1)$.

Ответ. $A\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ или $A\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 7 (для самостоятельного решения). Прямоугольные координаты точки $A(2,\ -2)$. Найти ее полярные координаты.

Ответ. $A\left(2\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)$ или $A\left(-2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 8. Найти прямоугольные координаты точки A, полярные координаты которой $\left(2,\ \frac{1}{4}\pi\right)$.

Решение. По формулам перехода (7, 1)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

получаем

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad x = \sqrt{2},$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{2}.$$

Задача 7, 9. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой $A\left(-3,\ \frac{5}{4}\pi\right)$.

Решение.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

$$x = -3\cos\frac{5}{4}\pi, \qquad y = -3\sin\frac{5}{4}\pi,$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 7, 10 (для самостоятельного решения). Найти прямоугольные координаты точки A, полярные координаты которой $\left(2,\ \frac{3}{2}\pi\right)$.

Ответ. $x = 0$; $y = -2$.

Задача 7, 11. Составить уравнение прямой линии в полярных координатах.

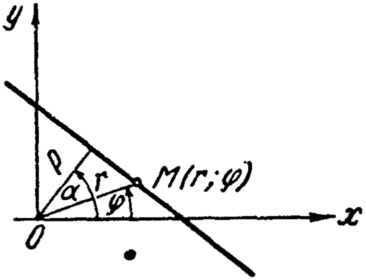
Решение. Поместим полюс полярной системы координат в начало прямоугольной системы координат, полярную ось совместим с положительной полуосью абсцисс (фиг. 7, 4).

Возьмем уравнение прямой в нормальном виде

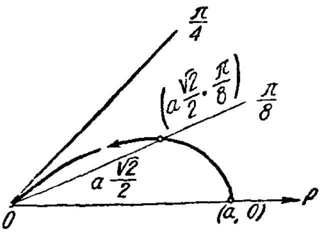
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Формулы перехода (7, 1) имеют вид

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Фиг. 7,4.



Фиг. 7,5.

Подставив в это уравнение значения x и y из формулы (7, 1), получим $r\cos\varphi\cdot\cos\alpha + r\sin\varphi\cdot\sin\alpha - p = 0$,

или $\quad r(\cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha) - p = 0,$

откуда $\quad r\cos(\varphi - \alpha) = p,$

и окончательно $\quad r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$

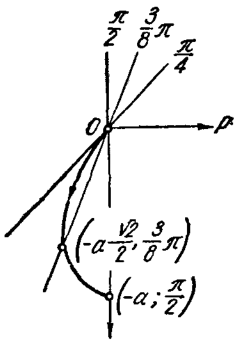
В этом уравнении постоянными величинами являются p и α, величины же r и φ — переменные: это текущие полярные координаты точки на прямой (последняя формула может быть получена также из чертежа).

Задача 7, 12. Построить кривую $r = a\cos 2\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

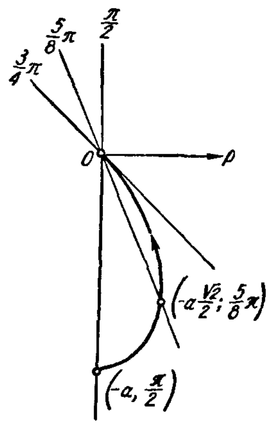
Решение. Будем давать значения полярному углу φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{8}$ и вычислим соответствующие значения r. Найденные значения поместим в таблицу. Примем произвольный отрезок за единицу масштаба, которой мы будем пользоваться при построении r. По значениям r и φ из таблицы построим точки, соответствующие каждой паре чисел r и φ, и соединим их *плавной кривой*.

φ	2φ	$r = a\cos 2\varphi$
0	0	a
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	$-a$
$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	2π	a

φ	2φ	$r = a\cos 2\varphi$
$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	0
$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-a$
$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	0
$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	4π	a



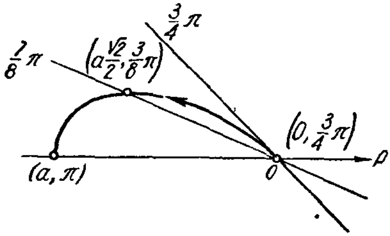
Фиг. 7,6.



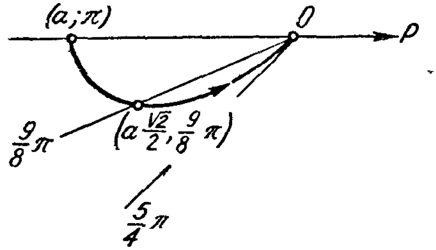
Фиг. 7,7.

Построение кривой показано на фиг. 7,5 — 7,12.

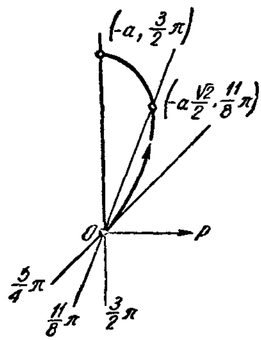
На фиг. 7, 13 кривые, построенные на различных этапах, соединены в одну. Полученная кривая называется четырехлепестковой розой.



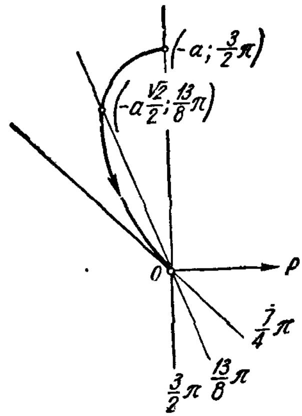
Фиг. 7,8.



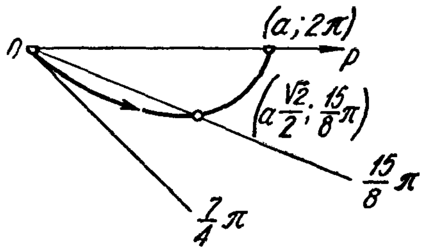
Фиг. 7,9.



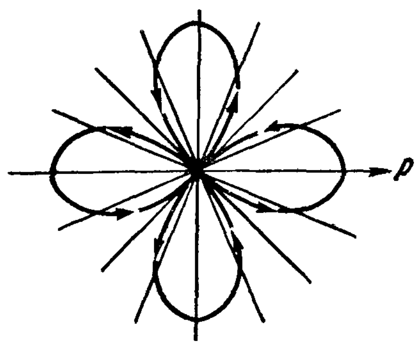
Фиг. 7,10.



Фиг. 7,11.



Фиг. 7,12.



Фиг. 7,13.

Теперь найдем уравнение четырехлепестковой розы в прямоугольной системе координат, причем напоминаем, что начало прямоугольной системы координат помещено в полюс полярной системы координат, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

Учитывая, что $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, уравнение четырехлепестковой розы $r = a\cos 2\varphi$ перепишем в виде $r = a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Подставляя сюда формулы перехода (7, 2), получим

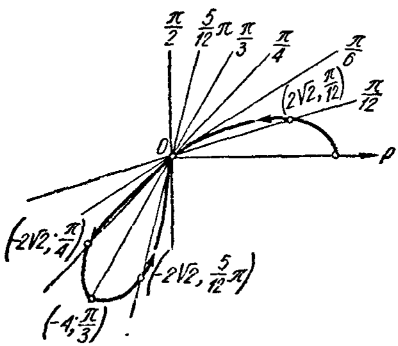
$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right),$$

или

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Отсюда

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2) = a(x^2-y^2).$$



Фиг 7,14

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получим окончательно

$$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2.$$

Задача 7, 13 (для самостоятельного решения). Построить кривую

$$r = 4\cos 3\varphi$$

и найти ее уравнение в прямоугольных координатах при условии, что начало прямоугольных координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью.

Указание. Углу φ придавать значения от 0 до 2π через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{12}$, т. е. значения

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots$$

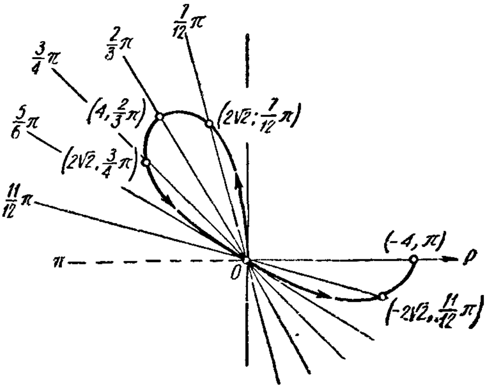
Постройте точки с координатами (r, φ) и соедините их плавной кривой (фиг. 7, 14—7, 18). Точки кривой для значений $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (фиг. 7, 16 и 7, 17) совпадут с построенными на фиг. 7, 14 и 7, 15.

Кривая $r = 4\cos 3\varphi$ называется трехлепестковой розой (фиг. 7, 18). Для преобразования уравнения этой кривой к прямоугольным координатам надо выразить $\cos 3\varphi$ через $\cos\varphi$:

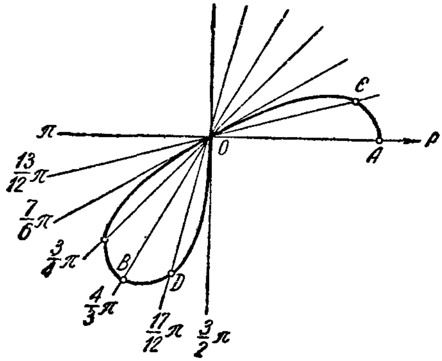
$$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi - \sin 2\varphi \cdot \sin\varphi$$

(использовать, что $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$, и учесть, что $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$). Окончательно

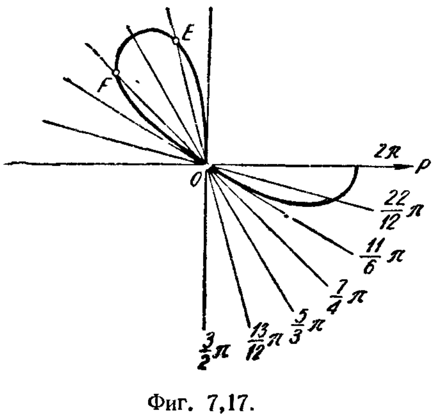
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$



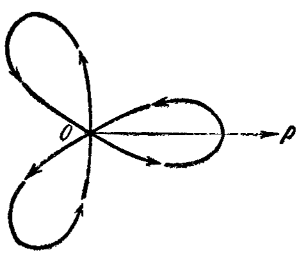
Фиг. 7,15.



Фиг. 7,16.



Фиг. 7,17.



Фиг. 7,18.

Уравнение кривой $r = 4\cos 3\varphi$ перепишется теперь в виде

$$r = 4(4\cos^2\varphi - 3\cos\varphi),$$

или

$$r = 16\cos^3\varphi - 12\cos\varphi.$$

Применить формулы (7, 2).

Ответ. $(x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 - 3y^2)$.

Задача 7, 14 (для самостоятельного решения).

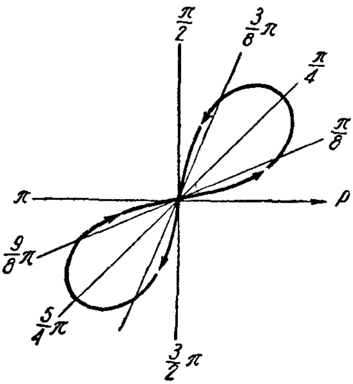
Построить кривую $r = 5\sin 3\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат, полагая, что начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью.

Задача 7, 15 (для самостоятельного решения). Построить лемнискату Бернулли

$$r^2 = 6\sin 2\varphi$$

и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат при расположении осей координат, указанном в предыдущей задаче.

Ответ. Кривая изображена на фиг. 7, 19.



Фиг. 7,19.

Задача 7, 16. Построить кривую

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3 \quad (a > 0).$$

Указание. Найти полярное уравнение кривой. Поместить полюс в начало прямоугольной системы координат, а полярную ось совместить с положительной частью оси абсцисс. Воспользоваться формулами (7, 1). Уравнение данной кривой в полярных координатах имеет вид

$$r = 2a\cos^3\varphi.$$

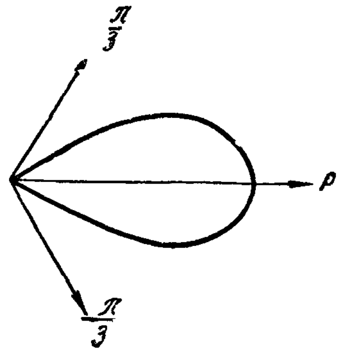
Из рассмотрения данного уравнения мы заключаем, что при любых значениях x и y его левая часть не отрицательна, так как она содержит квадрат суммы $x^2 + y^2$. Значит, и правая его часть $2ax^3$ $(a > 0)$ не может быть отрицательной, т. е. x не может принимать отрицательных значений. Это говорит о том, что вся кривая будет расположена вправо от оси Oy.

Так как замена в данном уравнении y на $-y$ не изменяет уравнения, то очевидно, что кривая расположена симметрично относительно оси абсцисс. Значит, достаточно построить кривую в первой четверти, а затем симметричную ей часть — в четвертой четверти. Эти соображения говорят о том, что полярному углу φ в уравнении данной кривой $r = 2a\cos^3\varphi$ следует придавать значения только от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, это простое исследование помогло нам значительно упростить вычисления, так как теперь, вместо того, чтобы придавать полярному углу φ значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, мы ограничимся значениями для φ только из первой четверти (кривая изображена на фиг. 7, 20).

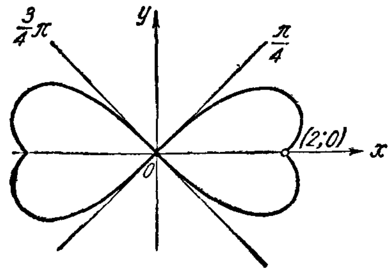
Задача 7, 17 (для самостоятельного решения). Построить кривую

$$x^6 = 4(x^4 - y^4).$$

Указание. Прежде всего усматриваем, что замена x на $-x$ и y на $-y$ не изменяет уравнения кривой. Это говорит о том, что кривая расположена симметрично относительно координатных осей. Поэтому достаточно построить кривую только в первой четверти, а потом, учитывая симметрию ее относительно координатных осей, построить ее в трех остальных четвертях.



Фиг. 7,20.



Фиг. 7,21.

Перейдем к полярной системе координат, расположив ее так, как было указано в предыдущей задаче. Используя формулы (7, 1), получим уравнение кривой в полярной системе координат

$$r = \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos^3 \varphi}.$$

Так как полярный радиус r может принимать только действительные значения, то $\cos 2\varphi$, стоящий под знаком корня в полученном уравнении, не может быть отрицательным, т. е. должно быть $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Это значит, что угол 2φ должен находиться или в первой, или в четвертой четверти. Но мы уже выяснили, что достаточно построить кривую только в первой четверти, а поэтому будем рассматривать значения 2φ, удовлетворяющие условию $0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что для построения кривой в первой четверти углу φ следует придавать значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Эскиз кривой показан на фиг. 7, 21.

Задача 7, 18 (для самостоятельного решения). Построить спираль Архимеда $r = a\varphi\ (a > 0)$.

Задача 7, 19 (для самостоятельного решения). Построить кардиоиду

$$r = 2a(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0).$$

Задача 7, 20 (для самостоятельного решения). Построить гиперболическую спираль

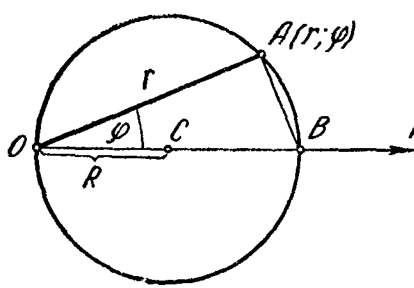
$$r = \frac{k}{\varphi} \quad (k > 0).$$

ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Составление уравнения кривой по ее геометрическим свойствам.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Составить уравнение линии на плоскости в выбранной системе координат — это значит составить такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, которые на этой линии не лежат (это определение следует усвоить, так как оно неоднократно в дальнейшем используется).



Фиг. 8,1.

Для вывода уравнения линии поступают так:

1. Выбирают на плоскости систему координат.

2. На линии, уравнение которой выводится, берут произвольную точку. Координаты этой точки обозначают через x и y, если уравнение линии выводится в прямоугольных координатах, или через r и φ, если оно выводится в полярных координатах. Основываясь на заданном свойстве всех точек, лежащих на линии, составляют уравнение, связывающее координаты произвольной точки с некоторыми постоянными величинами, данными в задаче. Найденное уравнение и будет искомым.

Задача 8, 1. Составить уравнение окружности, проходящей через полюс системы координат, центр которой C лежит на полярной оси, а радиус равен R (фиг. 8, 1), и найти уравнение этой окружности в прямоугольных координатах.

Для вывода уравнения окружности, указанной в задаче, возьмем на окружности произвольную точку $A(r, \varphi)$ и соединим ее с точкой B — концом диаметра. Угол OAB — прямой, а потому, так как диаметр равен $2R$, из прямоугольного треугольника AOB получаем

$$r = 2R\cos\varphi.$$