Задача 7, 19 (для самостоятельного решения). Построить кардиоиду

$$r = 2a(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0).$$

Задача 7, 20 (для самостоятельного решения). Построить гиперболическую спираль

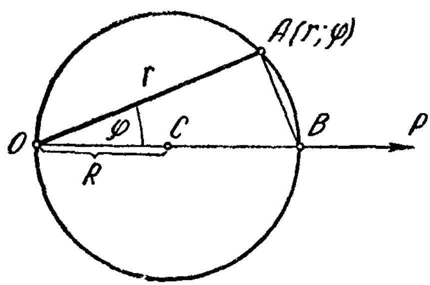
$$r = \frac{k}{\varphi} \quad (k > 0).$$

ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Составление уравнения кривой по ее геометрическим свойствам.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Составить уравнение линии на плоскости в выбранной системе координат — это значит составить такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, которые на этой линии не лежат (это определение следует усвоить, так как оно неоднократно в дальнейшем используется).



Фиг. 8,1.

Для вывода уравнения линии поступают так:

1. Выбирают на плоскости систему координат.

2. На линии, уравнение которой выводится, берут произвольную точку. Координаты этой точки обозначают через x и y, если уравнение линии выводится в прямоугольных координатах, или через r и φ, если оно выводится в полярных координатах. Основываясь на заданном свойстве всех точек, лежащих на линии, составляют уравнение, связывающее координаты произвольной точки с некоторыми постоянными величинами, данными в задаче. Найденное уравнение и будет искомым.

Задача 8, 1. Составить уравнение окружности, проходящей через полюс системы координат, центр которой C лежит на полярной оси, а радиус равен R (фиг. 8, 1), и найти уравнение этой окружности в прямоугольных координатах.

Для вывода уравнения окружности, указанной в задаче, возьмем на окружности произвольную точку $A(r, \varphi)$ и соединим ее с точкой B — концом диаметра. Угол OAB — прямой, а потому, так как диаметр равен $2R$, из прямоугольного треугольника AOB получаем

$$r = 2R\cos\varphi.$$

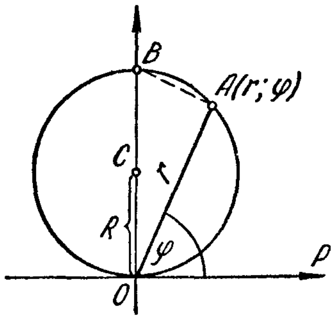
Это и будет искомое уравнение. Теперь преобразуем это уравнение к прямоугольным координатам. Используя формулы перехода (7, 2), будем иметь

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=2R\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

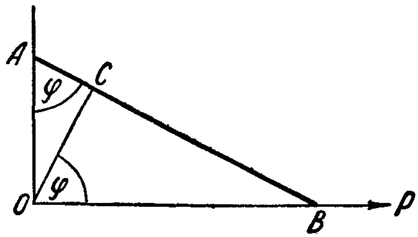
Умножая обе части уравнения на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получим

$$x^2+y^2=2Rx, \text{ или } x^2+y^2-2Rx=0.$$

Задача 8, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение окружности радиуса R, проходящей через полюс, центр которой C лежит на прямой, перпендикулярной полярной оси и проходящей через полюс (фиг. 8, 2). Найти уравнение этой окружности в прямоугольных координатах.



Фиг. 8,2.



Фиг. 8,3.

Ответ. Искомое уравнение в полярной системе координат

$$r=2R\sin\varphi.$$

Уравнение этой окружности в прямоугольных координатах

$$x^2+y^2-2Ry=0.$$

Задача 8, 3 (для самостоятельного решения) Найти уравнение окружности радиуса a, центр которой находится в полюсе. Написать уравнение этой окружности в прямоугольной системе координат.

Ответ. $r=a$; в прямоугольной системе координат

$$x^2+y^2=a^2.$$

Задача 8, 4. Отрезок AB неизменной длины $2l$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OC. Найти геометрическое место оснований таких перпендикуляров. Построить кривую и найти ее уравнение в прямоугольных координатах.

Решение. Поместим полюс полярной системы координат в вершину прямого угла, а полярную ось направим по одной из сторон прямого угла — например, по стороне OB (фиг. 8, 3).

Пусть точка C имеет полярные координаты r и φ. Тогда

$$\begin{aligned} BC &= r \operatorname{tg} \varphi \\ AC &= r \operatorname{ctg} \varphi \\ \hline BC + AC &= r(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi), \end{aligned}$$

но

$$BC + AC = 2l \text{ и } r(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = 2l,$$

а отсюда

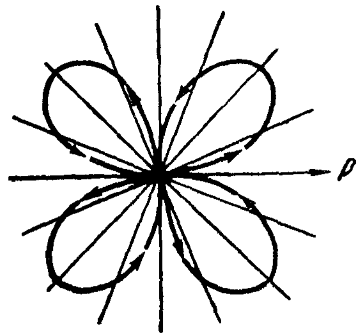
$$r\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = 2l,$$

$$r \cdot \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = 2l,$$

$$r \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = 2l, \text{ или } r = l\sin 2\varphi.$$

Это и есть искомое уравнение. Значит, наше геометрическое место имеет уравнение

$$r = l\sin 2\varphi.$$



Фиг. 8,4.

Кривая — четырехлепестковая роза (фиг. 8, 4).

Теперь постройте кривую (полярному углу φ придавать значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{8}$). Найдем уравнение этой кривой в прямоугольной системе координат. Уравнение кривой перепишем в виде $r = 2l\sin\varphi \cdot \cos\varphi$ ($\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \times \cos\varphi$). Используя формулы (7, 2) для перехода от полярной системы координат к прямоугольной, получим

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = 2l\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

а отсюда, возводя в квадрат обе части равенства, будем иметь окончательно

$$(x^2 + y^2)^3 = 4l^2x^2y^2.$$

Сравнивая уравнение нашей кривой в прямоугольных координатах с ее уравнением в полярных координатах

$$r = l\sin 2\varphi,$$

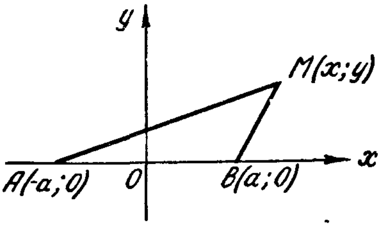
мы усматриваем, что последнее значительно проще. Кривая получается поворотом на 45° кривой, изображенной на фиг. 7, 13.

Задача 8, 5. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная a^2. Длину AB считать равной $2a$.

Решение. Проведем вывод уравнения в прямоугольных координатах. Направим ось Ox по прямой, соединяющей A и B, как обычно, вправо, начало координат поместим в средине отрезка AB, ось Oy направим вверх по перпендикуляру к оси Ox. Длина отрезка AB по условию равна $2a$ ($AB = 2a$); тогда точки A и B будут иметь координаты: A ($-a$, 0); B (a, 0). Пусть точка M принадлежит кривой. Ее координаты обозначим через x и y (фиг. 8, 5).

Из условия задачи $AM \cdot BM = a^2$. По формуле расстояния между двумя точками

$$AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$



Фиг. 8,5.

Значит,

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \times \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$[(x+a)^2 + y^2]\,[(x-a)^2 + y^2] = a^4,$$

или

$$[(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax]\,[(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4;$$

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4.$$

Упрощая, получаем

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Это и есть искомое уравнение.

Преобразуем теперь это уравнение к полярным координатам, поместив полюс полярной системы координат в начале прямоугольной системы координат, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox. Подставляя в последнее уравнение значения x и y из формул перехода (7, 1), будем иметь

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

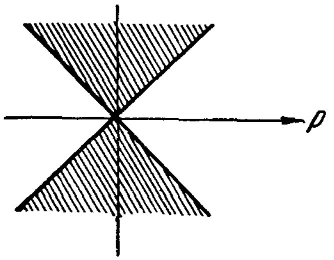
Замечая, что $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, и сокращая на r^2, получим окончательно

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

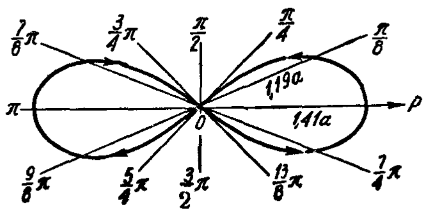
Кривая, определяемая этим уравнением, называется лемнискатой Бернулли. Постройте теперь эту кривую.

Так же, как в задаче 7, 12, составьте таблицу значений r по известным значениям φ, имея в виду, что так как полярный радиус может принимать только действительные значения, то кривая не может быть расположена в тех секторах, где полярный радиус имеет мнимые значения.

Это будет иметь место для значений φ от $\varphi = \frac{\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и от $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ до $\varphi = \frac{7}{4}\pi$, а поэтому в этих секторах точек кривой нет. На фиг. 8, 6 эти секторы заштрихованы, а кривая изображена на фиг. 8, 7.



Фиг. 8,6



Фиг. 8,7.

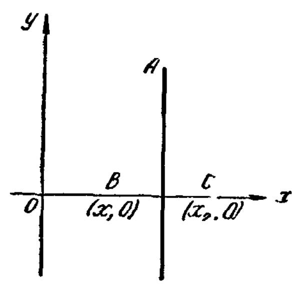
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в составлении уравнений линий.

Это практическое занятие является продолжением предыдущего. Мы будем составлять уравнение линии по известному свойству, общему всем ее точкам.

Задача 9, 1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат и пусть две данные точки B и C лежат на оси абсцисс и имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ (фиг. 9, 1). Пусть точка A принадлежит искомому геометрическому месту. Обозначим ее координаты через x и y: $A(x, y)$.



Фиг. 9,1.

На основании формулы для определения расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}, \quad AC = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2},$$

и значит, так как по условию $AB = AC$ мы можем написать, что

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}.$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места.

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, будем иметь

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + y^2.$$