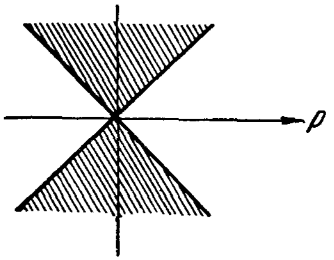
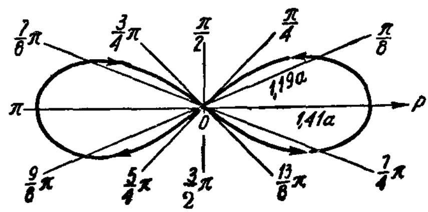
Это будет иметь место для значений φ от $\varphi=\frac{\pi}{4}$ до $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ и от $\varphi=\frac{5}{4}\pi$ до $\varphi=\frac{7}{4}\pi$, а поэтому в этих секторах точек кривой нет. На фиг. 8, 6 эти секторы заштрихованы, а кривая изображена на фиг. 8, 7.



Фиг. 8,6



Фиг. 8,7.

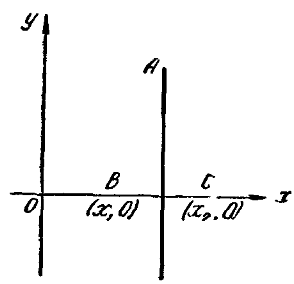
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в составлении уравнений линий.

Это практическое занятие является продолжением предыдущего. Мы будем составлять уравнение линии по известному свойству, общему всем ее точкам.

Задача 9, 1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат и пусть две данные точки B и C лежат на оси абсцисс и имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ (фиг. 9, 1). Пусть точка A принадлежит искомому геометрическому месту. Обозначим ее координаты через x и y: $A(x, y)$.



Фиг. 9,1.

На основании формулы для определения расстояния между двумя точками

$$AB=\sqrt{(x-x_1)^2+y^2},\quad AC=\sqrt{(x-x_2)^2+y^2},$$

и значит, так как по условию $AB=AC$ мы можем написать, что

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}.$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места.

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, будем иметь

$$(x-x_1)^2+y^2=(x-x_2)^2+y^2.$$

После очевидных упрощений получим

$$2x(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

сокращая на $x_2 - x_1$ ($x_2 - x_1 \neq 0$), имеем

$$2x = x_1 + x_2,$$

или

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Это уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox и проходящей через середину отрезка BC.

Итак, искомым геометрическим местом является прямая, перпендикулярная к отрезку BC, соединяющему данные точки, и проходящая через его средину.

Замечание. При решении задачи нам пришлось уничтожить радикалы в уравнении искомого геометрического места

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}, \tag{A}$$

в результате чего было получено уравнение

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{B}$$

Из алгебры известно, что возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к уравнению, которое не равносильно (не эквивалентно) исходному. Это значит, что уравнение, полученное от возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения, может иметь решения, не удовлетворяющие исходному уравнению, т. е. иметь так называемые «посторонние» корни. Поэтому всегда в тех случаях, когда обе части уравнения приходится возводить в квадрат, следует ставить вопрос об эквивалентности полученного и исходного уравнений.

В интересующем нас случае вопрос ставится так: не содержит ли линия (B) точек, которых нет на линии (A), т. е. таких, координаты которых не удовлетворяют уравнению (A) и таким образом не удовлетворяют исходному условию $AB = AC$.

Чтобы убедиться в том, что линия (B) не содержит точек, которых нет в линии (A), надо показать, что уравнение (B) может быть преобразовано в уравнение (A).

Произведя в обратном порядке операции, с помощью которых было получено уравнение (B), мы придем к уравнению

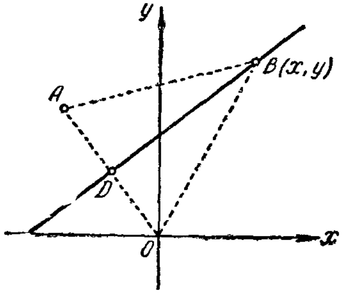
$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + y^2,$$

откуда следует, что

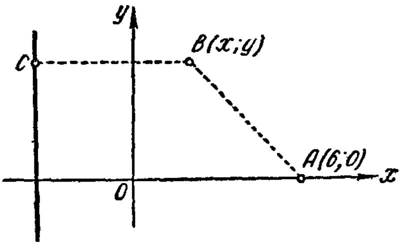
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \pm\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}, \tag{C}$$

т. е. что $AB = \pm AC$; отсюда видно, что или $AB - AC = 0$, или $AB + AC = 0$.

Но $AB > 0$ и $AC > 0$, а следовательно, $AB + AC \neq 0$, так как сумма двух положительных величин не может быть равна нулю, а потому остается только одно равенство $AB - AC = 0$, т. е. $AB = AC$, и знак минус перед корнем в правой части уравнения (C) должен быть отброшен. Поскольку из уравнения (A) получается уравнение (B) и обратно — из уравнения (B) следует уравнение (A), то эти уравнения равносильны (эквивалентны). Таким образом, поставленный нами вопрос решен: линия (B) не содержит таких точек, которых нет на линии (A).



Фиг. 9,2.



Фиг. 9,3.

При решении следующих задач этого практического занятия нам придется часто обе части исходного уравнения возводить в квадрат. Учащийся должен знать, что всякий раз в таком случае перед ним должен возникать вопрос об эквивалентности полученного и исходного уравнений. Однако мы во всех последующих задачах этим заниматься не будем, а заметим только, что эквивалентность исходного и окончательного уравнений в этих задачах действительно имеет место.

Задача 9, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A(-3,\ 4)$ (фиг. 9, 2).

Ответ. $6x - 8y + 25 = 0$.

Проверьте, что эта прямая перпендикулярна отрезку AO и проходит через его середину.

Задача 9, 3 (для самостоятельного решения). Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от прямой $x = -4$ и точки $A(6,\ 0)$.

Указание. Пусть точка $B(x,\ y)$ принадлежит искомому геометрическому месту (фиг. 9, 3). По условию расстояния от точки B до прямой $x = -4$ и до точки $A(6, 0)$ между собою равны, т. е. $AB = BC$. По формуле для определения расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}, \text{ а } BC = x + 4$$

и

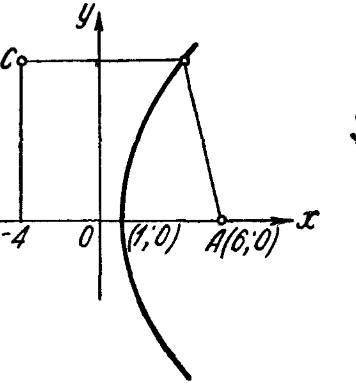
$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = x + 4.$$

Ответ. $y^2 = 20(x-1)$. Эскиз кривой показан на фиг. 9, 4.

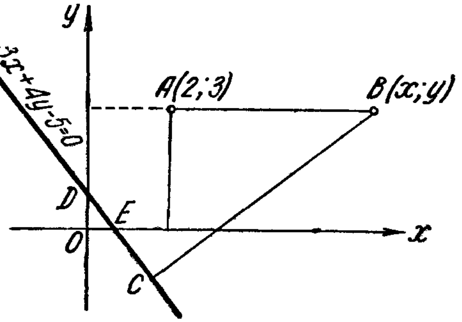
Как увидим в дальнейшем, это — уравнение параболы, и значит, искомым геометрическим местом является парабола.

Задача 9, 4 (для самостоятельного решения). Определить траекторию точки, которая движется так, что ее расстояние от точки (2, 3) равно ее расстоянию до прямой $3x + 4y - 5 = 0$.

Указание. Пусть точка $B(x, y)$ принадлежит искомому геометрическому месту (фиг. 9, 5). По условию $BC = AB$. Расстояние BC от точки $B(x, y)$ до прямой $3x + 4y - 5 = 0$ найти по правилу определения расстояния от точки до прямой (см. задачу 5, 2). Получим $\frac{3x + 4y - 5}{5} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$.



Фиг. 9,4.



Фиг. 9,5.

Это и есть уравнение искомого геометрического места. Возводя в квадрат обе части уравнения*, освобождаясь от дробей и перенося все члены уравнения в его правую часть, получим окончательно

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 70x - 110y + 300 = 0.$$

Геометрическое место, уравнение которого мы нашли, есть парабола.

Следует запомнить, что геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки и от данной прямой, является парабола.

Задача 9, 5 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $x + y - 2 = 0$ и точки $(1, -1)$.

Ответ. Парабола $x^2 - 2xy + y^2 + 8y = 0$.

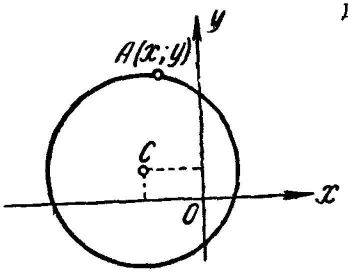
Задача 9, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение траектории точки A, которая движется так, что ее расстояние от точки $C(-5, 2)$ всегда равно 7 (фиг. 9, 6).

---

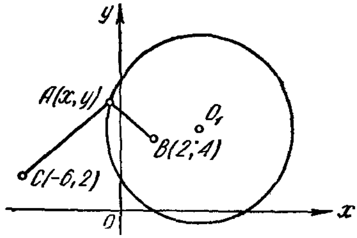
* По поводу возведения в квадрат обеих частей уравнения см. замечание к задаче 9, 1.

Ответ. Траектория — окружность $x^2+y^2+10x-4y-20=0$ с центром в точке $C(-5,\ 2)$ и радиус ее $R=7$.

Задача 9, 7. Найти траекторию точки A, которая движется так, что ее расстояние до точки $B(2,\ 4)$ в два раза меньше, чем до точки $C(-6,\ 2)$.



Фиг. 9,6.



Фиг. 9,7.

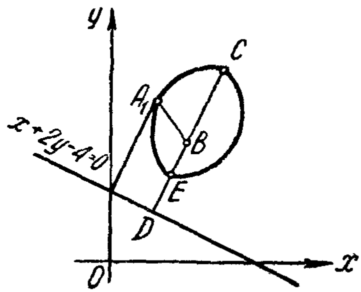
Указание. Обозначить координаты точки A, как всегда, через x и y (фиг. 9,7). По условию $AC=2AB$.

$$AC=\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2};\quad AB=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}.$$

Значит, из $AC=2AB$ получаем, что

$$\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=$$
$$=2\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}.$$

Ответ. Траекторией является окружность $3x^2+3y^2-28x-$ $-28y+40=0$ с центром в точке $\left(\frac{14}{3},\ \frac{14}{3}\right)$, а ее радиус $r\approx 5{,}5$.



Фиг. 9,8.

Задача 9, 8 (для самостоятельного решения). Точка A движется так, что отношение ее расстояния до точки $B(2,\ 3)$ к ее расстоянию до прямой $x+2y-4=0$ равно $\frac{1}{2}$. Найти уравнение траектории точки.

Указание. Обозначить координаты точки A через x и y (фиг. 9, 8). Расстояние точки $A(x,\ y)$ до точки $B(2,\ 3)$ $AB=$ $=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, а ее расстояние AC до прямой $x+2y-$ $-4=0$ будет равно

$$AC=\left|\frac{x+2y-4}{\sqrt{5}}\right|;$$

по условию $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

Отсюда $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}{\left|\dfrac{x+2y-4}{\sqrt{5}}\right|}=\dfrac{1}{2}$.

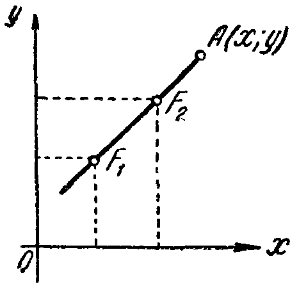
Ответ. Уравнение траектории

$$19x^2-4xy+16y^2-72x-104y+244=0.$$

Задача 9, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых от точек $F_1(2, 3)$ и $F_2(4, 5)$ есть величина постоянная, равная 10 (фиг. 9, 9).

Ответ. $24x^2-2xy+24y^2-136x-186y+1=0$ (эллипс).

Задача 9, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от данной прямой AB в два раза меньше расстояния от данной точки C, не лежащей на этой прямой.



Фиг. 9,9.

Указание. Направить ось Ox по данной прямой AB, а ось Oy по перпендикуляру к оси Ox, проходящему через данную точку C. Координаты точки C пусть будут $(0, b)$ $(b\neq 0)$.

Ответ. $x^2-3y^2-2by+b^2=0$ (гипербола).

Следует иметь в виду, что уравнение геометрического места в выбранной системе координат может оказаться более или менее сложным в зависимости от расположения координатных осей в выбранной системе координат. В данном случае, если бы мы направили ось Oy не через точку C, то абсцисса точки C уже была бы равна не нулю, а скажем, a, и уравнение геометрического места оказалось бы более сложным. Следует, однако, помнить, что в зависимости от того или иного расположения координатных осей может измениться только уравнение линии, но не сама линия.

Задача 9, 11 (для самостоятельного решения). Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, проходящие через точку (a, b).

Ответ. Окружность $x^2+y^2-ax-by=0$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: окружность, эллипс.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (10, 1)$$