Отсюда $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}{\left|\dfrac{x+2y-4}{\sqrt{5}}\right|}=\dfrac{1}{2}$.

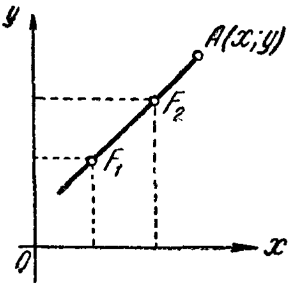
Ответ. Уравнение траектории

$$19x^2-4xy+16y^2-72x-104y+244=0.$$

Задача 9, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых от точек $F_1(2,\ 3)$ и $F_2(4,\ 5)$ есть величина постоянная, равная 10 (фиг. 9, 9).

Ответ. $24x^2-2xy+24y^2-136x-186y+1=0$ (эллипс).

Задача 9, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от данной прямой AB в два раза меньше расстояния от данной точки C, не лежащей на этой прямой.



Фиг. 9,9.

Указание. Направить ось Ox по данной прямой AB, а ось Oy по перпендикуляру к оси Ox, проходящему через данную точку C. Координаты точки C пусть будут $(0,\ b)$ $(b\neq 0)$.

Ответ. $x^2-3y^2-2by+b^2=0$ (гипербола).

Следует иметь в виду, что уравнение геометрического места в выбранной системе координат может оказаться более или менее сложным в зависимости от расположения координатных осей в выбранной системе координат. В данном случае, если бы мы направили ось Oy не через точку C, то абсцисса точки C уже была бы равна не нулю, а скажем, a, и уравнение геометрического места оказалось бы более сложным. Следует, однако, помнить, что в зависимости от того или иного расположения координатных осей может измениться только уравнение линии, но не сама линия.

Задача 9, 11 (для самостоятельного решения). Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, проходящие через точку $(a,\ b)$.

Ответ. Окружность $x^2+y^2-ax-by=0$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: окружность, эллипс.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (10,\ 1)$$

где a и b — координаты центра окружности, а r — радиус окружности.

Если же центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (10,2)$$

2. Эллипс. Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек (фокусов) есть для всех точек эллипса одна и та же постоянная величина (эта постоянная величина должна быть больше, чем расстояние между фокусами).

Простейшее уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (10,3)$$

где a — большая полуось эллипса,

b — малая полуось эллипса.

Если $2c$ — расстояние между фокусами, то между a, b и c (если $a > b$) существует соотношение

$$a^2 - b^2 = c^2. \qquad (10,4)$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (10,5)$$

У эллипса эксцентриситет $e < 1$ (так как $c < a$), а его фокусы лежат на большой оси.

Задача 10, 1. Написать уравнение окружности с центром в точке C (2, —3) и радиусом, равным 6.

Решение. По уравнению (10, 1), полагая в нем $a = 2$, $b = -3$, $r = 6$, сразу имеем $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$, или

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0.$$

Задача 10, 2. (для самостоятельного решения). Написать уравнение окружности с центром в точке (—4, 7) и радиусом, равным 7.

Ответ. $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 49$,

или

$$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0.$$

Задача 10, 3. Показать, что

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Заданное уравнение преобразуем к виду (10, 1). Выпишем члены, содержащие только x, и члены, содержащие только y. Легко проверить (сделайте это!), что

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4,$$

$$y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9.$$

Левая часть уравнения запишется теперь так:

$$\underbrace{(x+2)^2-4}_{x^2+4x}+\underbrace{(y-3)^2-9}_{y^2-6y}-3=0,$$

или отсюда

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16. \qquad (A)$$

Сравнивая уравнение (A) с (10, 1), заключаем, что это уравнение определяет окружность, центр которой имеет координаты $C(-2, 3)$, $r^2=16$, а $r=4$.

Задача 10, 4. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2-x+2y-1=0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду (10, 1).

Соберем члены, содержащие только x и только y:

$$x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

$$y^2+2y=(y+1)^2-1.$$

Заданное уравнение перепишется в виде

$$\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}_{x^2-x}+\underbrace{(y+1)^2-1}_{y^2+2y}-1=0.$$

или

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2-\frac{9}{4}=0,$$

и окончательно в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{9}{4}.$$

Следовательно, из сравнения с уравнением (10, 1) заключаем, что центр окружности находится в точке $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, а радиус равен $\frac{3}{2}$.

Задача 10, 5 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2+3x-7y-\frac{3}{2}=0.$$

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $r=4$.

Задача 10, 6 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2+x-y=0.$$

Ответ. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 10, 7. Найти точки пересечения окружности $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и прямой $y = 2x$.

Решение. Координаты точек пересечения должны удовлетворять обоим указанным уравнениям, так как эти точки находятся как на одной, так и на другой линии. Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\\ y = 2x\end{aligned}\right\}.$$

Подставляя в первое уравнение $2x$ вместо y и раскрывая скобки, получим

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = 4,$$

или

$$5x^2 - 10x + 1 = 0,$$

а отсюда

$$x_1 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \quad x_2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}.$$

Подставляя эти значения во второе уравнение $y = 2x$, получим

$$y_1 = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = \frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

Искомыми точками пересечения будут $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$A\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ и } B\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right).$$

Задача 10, 8. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки: (0, 1); (2, 0); (3, —1).

Решение. Искомое уравнение имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Поскольку окружность проходит через указанные точки, координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Подставляя поочередно в искомое уравнение координаты данных точек, получим три уравнения для определения a, b и r. Вот эти уравнения:

$$\left.\begin{aligned}a^2 + (1-b)^2 = r^2\\ (2-a)^2 + b^2 = r^2\\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2\end{aligned}\right\}.$$

Возьмем уравнения первое и второе, а потом первое и третье. Правые части этих уравнений между собой равны, значит, равны и левые их части, и мы получаем

$$\left.\begin{aligned}a^2 + (1-b)^2 = (2-a)^2 + b^2\\ a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2\end{aligned}\right\}.$$

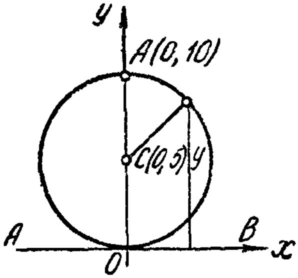
Раскрывая скобки и упрощая, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}4a - 2b = 3\\ 6a - 4b = 9\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$. Подставляя эти значения a и b в первое из уравнений системы, получим $r^2 = \frac{65}{2}$. Искомое уравнение имеет вид

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2},$$

или после упрощений $x^2 + y^2 + 3x + 9y - 10 = 0$.



Фиг. 10,1.

Задача 10, 9. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке A (0, 10) (фиг. 10, 1).

Решение. Известно, что диаметр окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Это значит, что диаметр OA окружности направлен по оси Oy, центр окружности находится в точке C (0,5), а радиус окружности $r = 5$. Искомое уравнение имеет вид

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25, \text{ или } x^2 + y^2 - 10y = 0.$$

Задача 10, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке (—12, 0).

Ответ. $x^2 + y^2 + 12x = 0$.

Задача 10, 11. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что: а) полуоси его $a = 6$, $b = 4$; б) расстояние между фокусами $2c = 10$, а большая ось $2a = 16$; в) малая полуось $b = 4$, и расстояние между фокусами $2c = 10$; г) большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $e = 0{,}5$; д) малая полуось $b = 8$, а эксцентриситет $e = 0{,}6$; е) сумма полуосей $a + b = 12$, а расстояние между фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

Решение. а) Простейшее уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Подставляя сюда $a = 6$, $b = 4$, получим

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

б) У нас $2c = 10$; $c = 5$;
$2a = 16$; $a = 8$.

Чтобы написать уравнение эллипса, следует найти малую полуось b. Между величинами a, b и c у эллипса существует зависимость $a^2 - b^2 = c^2$, или $b^2 = a^2 - c^2$. В нашем случае $b^2 = 64 - 25 = 39$, и уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

в) Решите самостоятельно.

Ответ. $\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$.

г) $a=12$; $e=0{,}5$; известно, что $e=\frac{c}{a}$; в этой формуле неизвестно c. Для его определения получаем уравнение

$$0{,}5=\frac{c}{12};\ \text{отсюда}\ c=6.$$

Теперь, зная, что $a=12$, $c=6$, пользуясь соотношением $a^2-c^2=b^2$, найдем, что $b^2=144-36=108$; $a^2=144$.

Уравнение будет $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$.

д) $b=8$; $e=0{,}6$; $e=\frac{c}{a}$, отсюда $\frac{c}{a}=0{,}6$, $c=0{,}6a$. Напишем соотношение $a^2-c^2=b^2$ и подставим в него $c=0{,}6a$; $b=8$. Получим $a^2-0{,}36a^2=64$; $0{,}64a^2=64$; $a^2=100$.

Уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

е) $a+b=12$, $2c=6\sqrt{2}$.

Для определения уравнения эллипса надо знать a и b. Нам известно, что $c=3\sqrt{2}$; $c^2=18$; $a^2-b^2=c^2$.

Поэтому $(a+b)\cdot(a-b)=18$. Подставляя сюда $a+b=12$, найдем, что $a-b=1{,}5$

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a+b&=12\\ a-b&=1{,}5\end{aligned}\right\},$$

получим, что $a=6{,}75$, $b=5{,}25$.

Уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x^2}{6{,}75^2}+\frac{y^2}{5{,}25^2}=1.$$

Задача 10, 12. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$4x^2+9y^2=144.$$

Решение. Преобразуем это уравнение к простейшему виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Разделив обе части заданного уравнения на 144, получим $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

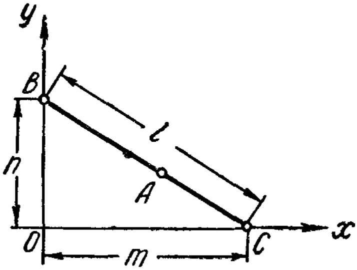
Отсюда заключаем, что $a^2=36$, $b^2=16$. Значит, $a=6$, $2a=12$; $b=4$; $2b=8$. Таким образом, длины осей равны соответственно 12 и 8. Зная a и b, из соотношения $a^2-c^2=b^2$ найдем c. Подставим $a=6$; $b=4$ и получим, что $c=2\sqrt{5}$. Координаты фокусов будут $(2\sqrt{5}, 0)$ и $(-2\sqrt{5}, 0)$. Эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 10, 13 (для самостоятельного решения). Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$16x^2 + 9y^2 = 144.$$

Указание. Фокусы эллипса лежат на его большой оси. Большая ось заданного эллипса лежит на оси Oy, как вы легко усмотрите, получив простейшее уравнение эллипса.



Фиг. 10,2.

Ответ. Большая ось равна 8, малая 6. Координаты фокусов

$F_1 \ (0, \sqrt{7})$, $F_2(0, -\sqrt{7})$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Задача 10, 14. Отрезок BC постоянной длины l движется своими концами по сторонам прямого угла BOC. Какую линию опишет на этом отрезке точка A, разделяющая его в отношении λ $\left(\frac{BA}{AC} = \lambda\right)$?

Решение. Стороны прямого угла, о котором идет речь в задаче, примем за оси прямоугольной системы координат (фиг. 10, 2), Если мы обозначим через m и n отрезки, отсекаемые отрезком BC соответственно на координатных осях Ox и Oy, то во все время движения будет сохраняться равенство

$$m^2 + n^2 = l^2.$$

Координаты точек B и C будут $B(0, n)$, $C(m, 0)$, Координаты точки A обозначим через x и y. Тогда по формулам (2, 1) для определения координат точки, делящей отрезок в данном отношении, получаем

$$x = \frac{0 + \lambda m}{1 + \lambda} = \frac{\lambda m}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{n + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = \frac{n}{1 + \lambda};$$

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{m}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{n}{1 + \lambda}.$$

Возведем обе части каждого из этих равенств в квадрат и почленно их сложим. Получим

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{(1 + \lambda)^2},$$

вспоминая, что $m^2 + n^2 = l^2$, имеем

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{l^2}{(1 + \lambda)^2},$$

а отсюда, деля обе части этого уравнения на его правую часть, запишем искомое уравнение в виде

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}} = 1.$$

Искомым геометрическим местом является эллипс с полуосями

$$a = \frac{\lambda l}{1+\lambda} \text{ и } b = \frac{l}{1+\lambda}.$$

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: гипербола, парабола.

Основные сведения из теории

Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина.* Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

Простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (11, 1)$$

Здесь a — действительная полуось гиперболы, b — мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ — расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (11, 2)$$

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (11, 3)$$

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (11, 4)$$