а отсюда, деля обе части этого уравнения на его правую часть, запишем искомое уравнение в виде

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}}=1.$$

Искомым геометрическим местом является эллипс с полуосями

$$a=\frac{\lambda l}{1+\lambda} \text{ и } b=\frac{l}{1+\lambda}.$$

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: гипербола, парабола.

Основные сведения из теории

Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина.* Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

Простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (11, 1)$$

Здесь a — действительная полуось гиперболы, b — мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ — расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$$a^2+b^2=c^2. \qquad (11, 2)$$

При $b=a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=a^2. \qquad (11, 3)$$

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси

$$e=\frac{c}{a}. \qquad (11, 4)$$

Асимптоты гиперболы — две прямые, определяемые уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}. \qquad (11,5)$$

Напомним, что асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, которая обладает тем свойством, что когда точка по кривой удаляется в бесконечность, ее расстояние до этой прямой стремится к нулю.

Парабола. *Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой.* Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая — ее директрисой.

Простейшее уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (11,6)$$

Входящая в это уравнение величина p называется параметром параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса.

Координаты фокуса F параболы (11, 6) $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Уравнение директрисы параболы (11, 6)

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad (11,7)$$

Эксцентриситет параболы $e = 1$.

Гипербола

Задача 11, 1. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами ее равно 20, а расстояние между фокусами 30.

Решение. Вершины гиперболы лежат на ее действительной оси. По условию $2a = 20$; $2c = 30$. Значит, $a = 10$; $c = 15$; $a^2 = 100$; $c^2 = 225$.

Величины a, b и c у гиперболы связаны соотношением (11, 2)

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

отсюда $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100$; $b^2 = 125$.

Значит, уравнением гиперболы будет

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1.$$

Задача 11, 2. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $e = 1,4$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. У нас $a=5$, $a^2=25$; $e=\frac{c}{a}=1{,}4$; $c=1{,}4a=$ $=1{,}4\cdot 5=7$, $c^2=49$; $b^2=c^2-a^2=49-25=24$, $b^2=24$; искомым уравнением будет

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1.$$

Задача 11, 3. Гипербола проходит через точки $\left(3, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и $(-2\sqrt{5}, 3)$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. Уравнение гиперболы (11, 1) может быть записано так:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2. \tag{11, 8}$$

Определению подлежат a^2 и b^2. Подставим в это уравнение координаты первой точки и получим

$$45b^2-12a^2=5a^2b^2.$$

Подставляя в уравнение гиперболы (11, 8) координаты второй точки, получим

$$20b^2-9a^2=a^2b^2.$$

Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 20b^2-9a^2&=a^2b^2\\ 45b^2-12a^2&=5a^2b^2\end{aligned}\right\}.$$

Умножая первое уравнение на 4, а второе на 3 и вычитая из второго первое, получим $a^2=5$. Подставим $a^2=5$ в первое уравнение и получим $20b^2-45=5b^2$, откуда $b^2=3$. Подставляя найденные значения a^2 и b^2 в (11, 8), получим, что искомое уравнение имеет вид

$$3x^2-5y^2=15.$$

Задача 11, 4. Найти уравнение асимптот гиперболы

$$2x^2-3y^2=6.$$

Решение. У гиперболы две асимптоты, определяемые уравнениями (11,5). Следует найти a и b.

Приведем уравнение гиперболы к простейшему виду, разделив обе его части на 6. Получим

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1.$$

Отсюда заключаем, чт $a^2=3$, $a=\sqrt{3}$; $b^2=2$, $b=\sqrt{2}$. Подставляя эти значения a и b в уравнения асимптот (11, 5) получаем

$$\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,y=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y=0.$$

Задача 11, 5 (для самостоятельного решения). Дана гипербола

$$\frac{x^2}{16}-y^2=1.$$

Найти уравнения ее асимптот.

Ответ. Уравнения асимптот

$$y=\frac{1}{4}x \text{ и } y=-\frac{1}{4}x.$$

Задача 11, 6. Найти эксцентриситет гиперболы $25x^2-36y^2=900$.

Указание. Привести уравнение гиперболы к простейшему виду (11, 1). Окажется, что $a=6$; $b=5$; из (11, 2) следует, что $c=\sqrt{61}$. Эксцентриситет $e=\frac{c}{a}$, $e=\frac{\sqrt{61}}{6}$.

Задача 11, 7. Уравнения асимптот гиперболы $y=\frac{1}{2}x$ и $y=-\frac{1}{2}x$, а расстояние между фокусами $2c=10$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид (11, 5). Из условия задачи следует, что: 1) $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ и $a=2b$; 2) $c=5$. Подставляя в соотношение (11, 2) значения $a=2b$ и $c=5$, получим $(2b)^2+b^2=25$; $b^2=5$; $a=2b$, а потому $a^2=4b^2=20$. Искомым уравнением гиперболы будет $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

Задача 11, 8. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ найти точку, расстояние которой от асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом было бы в два раза больше, чем расстояние ее от асимптоты с положительным угловым коэффициентом.

Решение. Так как у нас $a^2=25$; $a=5$; $b^2=9$; $b=3$, то на основании (11, 5) уравнение асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом запишется в виде $y=-\frac{3}{5}x$, или $3x+5y=0$, а уравнение асимптоты с положительным угловым коэффициентом

$$y=\frac{3}{5}x, \text{ или } 3x-5y=0.$$

Возьмем на правой ветви гиперболы точку A с координатами x и y. Ее расстояние d_1 до асимптоты $3x+5y=0$, определенное по правилу нахождения расстояния от точки до прямой, будет $d_1=\left|\frac{3x+5y}{\sqrt{34}}\right|$. Расстояние d_2 этой точки до асимптоты $3x-5y=0$

$$d_2=\left|\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}\right|.$$

По условию $d_1 = 2d_2$, или

$$\left|\frac{3x+5y}{\sqrt{34}}\right| = 2\left|\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}\right|.$$

Отсюда или

$$\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = -2\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}, \qquad (A)$$

или

$$\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = 2\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}. \qquad (B)$$

Из (A) следует, что

$$3x + 5y = -6x + 10y; \quad x = \frac{5}{9}y.$$

Из (B) вытекает, что

$$3x + 5y = 6x - 10y; \quad 3x - 15y = 0; \quad x = 5y.$$

Полученные соотношения $x = 5y$ и $x = \frac{5}{9}y$ есть зависимости между абсциссой и ординатой искомой точки. Подставим сначала $x = 5y$ в уравнение данной гиперболы. Из условия задачи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{25y^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, откуда $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; у нас $x = 5y$, т. е. $x_1 = \frac{15\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Но по условию задачи точка лежит на правой ветви гиперболы. Значит, абсцисса ее положительна, и значение $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$ должно быть отброшено. Ордината точки на правой ветви гиперболы может быть как положительной, так и отрицательной. Но из того, что $x = 5y$, следует, что y должен иметь такой же знак, как и x, а потому, так как абсцисса x положительна, ордината не может быть отрицательной. Значение $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ должно быть отброшено, и окончательно

$$x = \frac{15\sqrt{2}}{4}, \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Убедитесь самостоятельно, что зависимость $x = \frac{5}{9}y$ приводит к мнимым значениям y. На этой гиперболе нет точки, для которой $x = \frac{5}{9}y$. Таким образом, есть только одна точка $\left(\frac{15\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, удовлетворяющая условию задачи.

Задача 11, 9 (для самостоятельного решения). Найти острый угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Указание. Воспользоваться формулой (11, 4) и заменить в ней c по формуле (11, 2), откуда должно получиться соотношение

$$4a^2 = a^2 + b^2,$$

$$3a^2 = b^2, \quad b = \pm a\sqrt{3}, \quad \frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}.$$

Подставляя это значение $\frac{b}{a}$ в уравнения асимптот гиперболы (11, 5), получим

$$y = +\sqrt{3x} \text{ и } y = -\sqrt{3x}.$$

Угол между асимптотами найдем по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|,$$

где $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$. Отсюда заключаем, что угол $\varphi = 60^\circ$*.

Задача 11, 10. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точку A (4, 6).

Решение. Уравнение гиперболы преобразуем к простейшему виду и получим $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$, $a^2 = b^2 = 8$. Из соотношения (11, 2) получаем, что $c = 4$. Значит, координаты фокусов гиперболы $F_2(-4,0)$ и $F_1(4,0)$. В этих точках находятся фокусы эллипса. Обозначим большую и малую полуоси эллипса через a_1 и b_1. Расстояние между фокусами эллипса такое же, как и расстояние между фокусами гиперболы. Поэтому половину этого расстояния по-прежнему обозначаем через c. Но у эллипса

$$c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2},$$

$$\text{т. е. } 4 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \text{ и } a_1^2 - b_1^2 = 16. \qquad (A)$$

Для определения a_1 и b_1 нужно найти еще одно соотношение, связывающее их. Искомое уравнение эллипса запишется так:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \qquad (B)$$

Поскольку точка A (4, 6) лежит на эллипсе, ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляя в послед-

* Угол между асимптотами может быть найден также из таких соображений: угловой коэффициент одной асимптоты $k_1 = \sqrt{3}$, а другой — $k_2 = -\sqrt{3}$. Это значит, что асимптоты составляют с положительным направлением оси Ox углы в 60 и 120°, а следовательно, острый угол φ между ними равен $120 - 60^\circ = 60^\circ$.

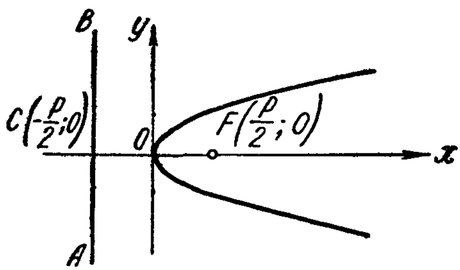
нее уравнение $x=4$, $y=6$, получаем, что $36a_1^2+16b_1^2=a_1^2b_1^2$. Присоединяя уравнение (A) к этому уравнению, получаем для определения a_1^2 и b_1^2 систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1^2-b_1^2&=16\\ 36a_1^2+16b_1^2&=a_1^2b_1^2\end{aligned}\right\}.$$

откуда $a_1^2=64$; $b_1^2=48$. Подставляя эти значения **в** (B), находим искомое уравнение $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

Парабола

Простейшее уравнение параболы имеет вид $y^2=2px\,(p>0)$. Вершина этой параболы находится в начале координат, ее ось направлена по оси Ox. Фокус этой параболы находится в точке $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, а директриса AB имеет уравнение $x=-\frac{p}{2}$. Парабола $y^2=2px$ расположена так, как указано на фиг. 11, 1 (запомните, что фокус параболы лежит на ее оси симметрии).



Фиг. 11,1.

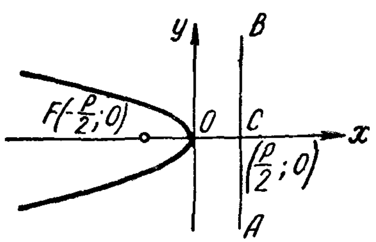
Задача **11, 11**. Как расположена относительно координатных осей линия $y^2=-2px\,(p>0)$? Какая это линия?

Решение. Прежде всего замечаем, что эта кривая проходит через начало координат, так как координаты точки (0, 0) удовлетворяют ее уравнению.

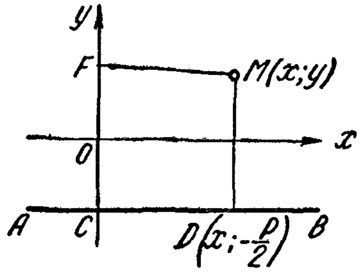
Левая часть уравнения при любом вещественном значении y положительна, значит и правая часть также должна быть положительной. Так как величина $p>0$ по условию, то это будет иметь место только тогда, когда величина x не является положительной, т. е. когда $x\leqslant 0$. Значит, x не может принимать положительных значений. Из уравнения $y^2=-2px$ видно, что при замене в нем y на $-y$ оно не изменится. Это говорит о том, что кривая расположена симметрично относительно оси Ox. Какая это кривая линия?

Возьмем параболу $y^2=2px$. Замена в этом уравнении x на $-x$ переводит параболу в кривую $y^2=-2px$. Следовательно, рассматриваемая кривая $y^2=-2px$ расположена симметрично параболе $y^2=2px$ относительно оси Oy. Значит, кривая $y^2=-2px$ — тоже парабола. Ее фокус и директриса симметричны фокусу и директрисе параболы $y^2 = 2px$ относительно оси Oy: фокус имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$, а директриса определяется уравнением $x = \frac{p}{2}$ (фиг. 11, 2).

Составим теперь уравнение параболы, исходя из известного определения этой кривой, выбрав такое расположение координатных осей: примем за ось Oy прямую, проходящую через фокус параболы перпендикулярно к ее директрисе, а за положительное направление на ней возьмем направление от директрисы



Фиг. 11,2.



Фиг. 11,3.

к фокусу. Начало координат поместим в точку, делящую пополам расстояние между фокусом и директрисой. Ось Ox направим, как обычно (фиг. 11, 3). Итак, AB — данная прямая, F — данная точка.

Если $FC = p$, то фокус F имеет координаты $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$. Пусть точка $M(x,\ y)$ принадлежит параболе. Тогда из определения параболы (см. стр. 90) следует, что $FM = MD$. По формуле расстояния между двумя точками $FM = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$, $MD = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$; координаты любой точки кривой удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2},$$

и после очевидных упрощений будем иметь $x^2 = 2py$. Если разрешить это уравнение относительно y, то получится, что

$$y = \frac{1}{2p}x^2.$$

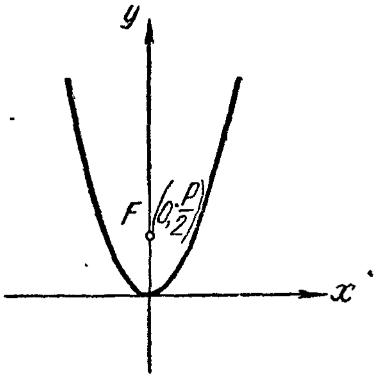
Обозначим $\frac{1}{2p} = a\ (a > 0)$, так как по условию $p > 0$. Уравнение параболы в этом случае будет иметь вид

$$y = ax^2 \quad (a > 0).$$

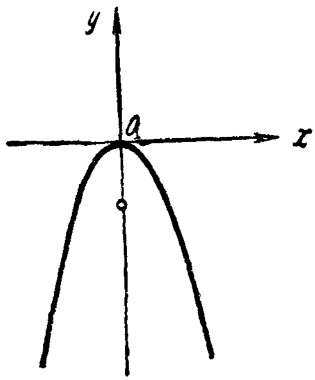
Исследуем теперь расположение этой параболы относительно координатных осей.

1. Точка с координатами (0, 0) лежит на параболе, так как из уравнения параболы усматриваем, что при $x = 0$ и $y = 0$, т. е. парабола $y = ax^2$ проходит через начало координат, являющееся вершиной параболы.

2. При замене x на $-x$ уравнение $y = ax^2$ не изменяется. Это значит, что парабола $y = ax^2$ расположена симметрично относительно оси Oy.



Фиг. 11,4.



Фиг. 11,5.

3. Так как по предположению $a > 0$, то при любом x, как положительном, так и отрицательном, будет $y > 0$. Это значит, что кривая расположена над осью Ox.

4. При возрастании x по абсолютной величине будет возрастать и y. Парабола $y = ax^2\,(a > 0)$ имеет вид, указанный на фиг. 11, 4. Координаты фокуса этой параболы найдем так: у нас $OF = \frac{p}{2}$, или с учетом того, что $\frac{1}{2p} = a$, получим $p = \frac{1}{2a}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4a}$. Итак, фокус параболы $y = ax^2$ имеет координаты $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Если в уравнении параболы $y = ax^2$ y заменить на $-y$, то мы получим кривую, которая расположена симметрично параболе $y = ax^2$ относительно оси Ox. Значит, кривая $y = -ax^2$ — тоже парабола. Расположение ее показано на фиг. 11, 5.

На фиг. 11, 6—11, 9 изображены параболы

$$\left.\begin{array}{ll} y^2 = 2px & (\text{фиг. } 11{,}6) \\ y^2 = -2px & (\text{фиг. } 11{,}7) \end{array}\right\} p > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y = ax^2 & (\text{фиг. } 11{,}8) \\ y = -ax^2 & (\text{фиг. } 11{,}9) \end{array}\right\} a > 0$$

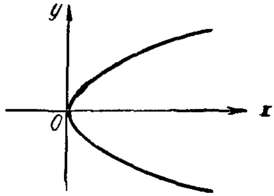
Параболу, определяемую уравнением $y = ax^2$, называют восходящей, а параболу, определяемую уравнением $y = -ax^2$, — нисходящей.

Расположение этих парабол следует хорошо запомнить.

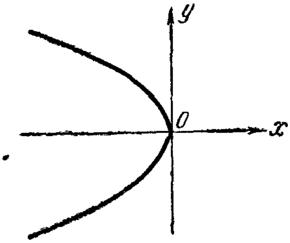
Задача 11, 12. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку A (2, 4). Определить ее параметр p.

Решение. Подставляем в уравнение параболы вместо текущих координат координаты точки A (2, 4). Получаем

$$4^2 = 2p \cdot 2; \quad 16 = 4p; \quad p = 4.$$

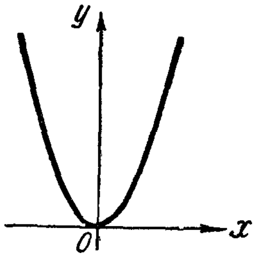


Фиг. 11,6.

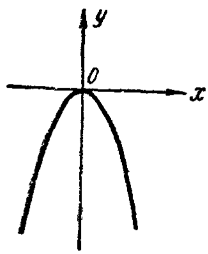


Фиг. 11,7.

Задача 11, 13. Составить уравнение параболы, зная, что вершина ее находится в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4 единицам длины, а осью симметрии служит ось Ox.



Фиг. 11,8.



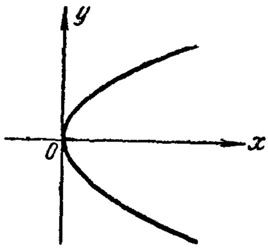
Фиг. 11,9.

Решение. Так как осью симметрии параболы служит ось Ox, а вершиной — начало координат, то парабола может быть определена одним из уравнений $y^2 = 2px$ и $y^2 = -2px$. Параметр параболы p есть расстояние от директрисы параболы до фокуса. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра. Значит, у нас $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$. Подставляя это значение p в каждое из только что написанных уравнений, получим

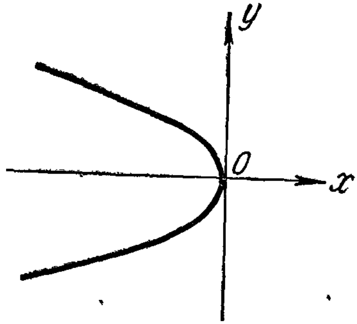
$$y^2 = 16x \text{ и } y^2 = -16x.$$

Эскизы парабол указаны на фиг. 11, 10 и 11, 11.

Задача 11, 14. Парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4, -1)$, а вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.



Фиг. 11,10.



Фиг. 11,11.

Решение. Так как парабола проходит через точку $A(4, -1)$ с положительной абсциссой, а ее осью служит ось Ox, то уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = 2px$. Подставляя в это уравнение координаты точки A, будем иметь

$$1 = 8p, \ p = \frac{1}{8}, \ 2p = \frac{1}{4};$$

искомым уравнением будет

$$y^2 = \frac{1}{4}x.$$

Эскиз этой параболы показан на фиг. 11, 10.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование прямоугольных координат. Параллельный перенос координатных осей без изменения их направления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой.

При такой замене надо установить формулы, позволяющие по известным координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой.

Главной целью преобразования координат является определение такой координатной системы, в которой уравнение данной линии становится наиболее простым. Удачным расположением ко-