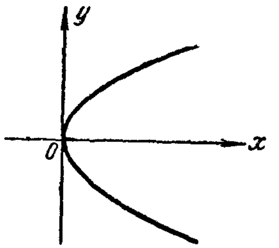
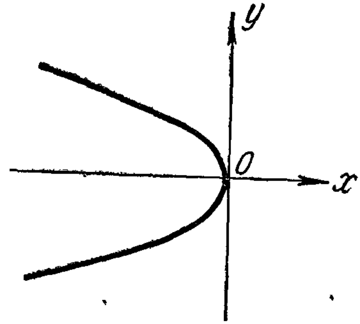
Эскизы парабол указаны на фиг. 11, 10 и 11, 11.

Задача 11, 14. Парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4, -1)$, а вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.



Фиг. 11,10.



Фиг. 11,11.

Решение. Так как парабола проходит через точку $A(4, -1)$ с положительной абсциссой, а ее осью служит ось Ox, то уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = 2px$. Подставляя в это уравнение координаты точки A, будем иметь

$$1 = 8p, \ \ p = \frac{1}{8}, \ \ 2p = \frac{1}{4};$$

искомым уравнением будет

$$y^2 = \frac{1}{4}x.$$

Эскиз этой параболы показан на фиг. 11, 10.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование прямоугольных координат. Параллельный перенос координатных осей без изменения их направления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой.

При такой замене надо установить формулы, позволяющие по известным координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой.

Главной целью преобразования координат является определение такой координатной системы, в которой уравнение данной линии становится наиболее простым. Удачным расположением координатных осей можно добиться того, чтобы уравнение кривой приняло наиболее простой вид. Это имеет важное значение для исследования свойств кривой.

Преобразование уравнения кривой второго порядка к простейшему виду достигается в общем случае 1) параллельным переносом координатной системы без изменения направления осей и 2) поворотом осей.

Если имеются две системы прямоугольных координат с разными началами, оси которых параллельны и одинаково направлены, то между координатами одной и той же точки в этих системах координат существует зависимость

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + x_0 \\ y &= y_1 + y_0 \end{aligned}\right\}, \qquad (12, 1)$$

где x, y — координаты точки в первоначальной системе координат, x_1, y_1 — ее координаты в новой системе координат, а x_0, y_0 — координаты нового начала O_1 в первоначальной системе координат.

Эти формулы позволяют определить первоначальные координаты точки x и y, если известны ее новые координаты и координаты нового начала в первоначальной системе координат.

Для обратного перехода от первоначальных к новым служат формулы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - x_0 \\ y_1 &= y - y_0 \end{aligned}\right\}. \qquad (12, 2)$$

Первоначальную систему координат иногда называют исходной, иногда — старой.

Задача 12, 1. Координаты точки относительно некоторой системы координат $x = 2$, $y = -1$. Чему будут равны координаты этой точки, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку:

а) $(7, -4)$; б) $(4, -2)$; в) $(2, -1)$; г) $(-1, -4)$.

Решение. а) По формулам (12, 2), полагая в них $x = 2$, $x_0 = 7$, $y = -1$, $y_0 = -4$, получаем $x_1 = 2 - 7$; $y_1 = -1 - (-4)$, отсюда новые координаты точки $x_1 = -5$; $y_1 = 3$.

Случаи б), в) и г) решите самостоятельно.

Ответ. б) $(-2, 1)$; в) $(0, 0)$; г) $(3, 3)$.

Задача 12, 2. Относительно двух систем координат xOy и $x_1O_1y_1$, имеющих одно и то же направление осей, координаты некоторой точки $(12, -7)$ и $(0, 15)$. Чему равны координаты начала каждой из этих систем относительно другой? Сделайте чертеж.

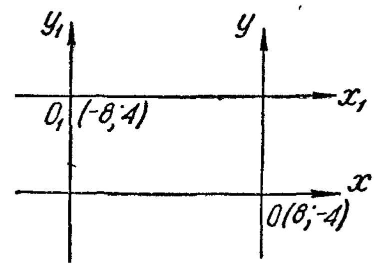
Решение. По формулам (12, 1), полагая в них $x = 12$, $x_1 = 0$, $y = -7$, $y_1 = 15$, получаем координаты нового начала в системе координат xOy:

$$12 = 0 + x_0, \; x_0 = 12,$$
$$-7 = 15 + y_0, \; y_0 = -22.$$

В системе координат $x_1O_1y_1$ координаты точки O — начала координат в системе xOy . получим, поменяв местами x с x_1 и y с y_1 в предыдущих формулах. Будем иметь

$$0 = 12 + x_0', \; x_0' = -12,$$
$$15 = -7 + y_0', \; y_0' = 22.$$

Здесь x_0' и y_0' — координаты точки O в системе координат $x_1O_1y_1$.



Фиг. 12,1

Задача 12, 3 (для самостоятельного решения). Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй $(8, -4)$. Чему равны координаты начала второй системы координат относительно первой (фиг. 12, 1)?

Ответ: $(-8, 4)$.

Задача 12, 4 (для самостоятельного решения). Как изменятся координаты любой точки $A(x, y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат, а за ось ординат — ось абсцисс?

Ответ. Абсцисса и ордината точки поменяются местами.

Геометрический смысл квадратичной функции:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Задача 12, 5. Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде оно не содержало члена с первой степенью x и свободного члена.

Решение. В учебнике Привалова на стр. 113 проведено исследование кривой, определяемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, и показано, что это уравнение определяет параболу.

Указанный в учебнике Привалова способ решает поставленную нами задачу. Мы укажем здесь другой прием, основанный также на параллельном переносе системы координат, который помогает проще решить эту задачу.

Заданное уравнение $y = ax^2 + bx + c$ преобразуем так: у первых двух слагаемых в правой части уравнения вынесем за скобки a $(a \neq 0)$. Теперь

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c. \qquad (A)$$

Из выражения $x^2+\frac{b}{a}x$, стоящего в скобке, выделим полный квадрат суммы двух слагаемых. Запишем это выражение в виде $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x$.

Прибавим к нему и вычтем из него $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, отчего выражение не изменится. Получим, что

$$x^2+\frac{b}{a}x=\underline{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Легко усмотреть, что сумма первых трех подчеркнутых слагаемых равна $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, а потому окончательно

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}.$$

Тем самым мы из $x^2+\frac{b}{a}x$ выделили полный квадрат суммы двух слагаемых: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Теперь выражение (A) может быть переписано так:

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c.$$

Если раскрыть скобки в правой части этого равенства, то получим

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c,$$

или

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

а отсюда следует, что

$$y-\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (B)$$

Сделаем параллельный перенос координатных осей без изменения их направления в точку O_1 с координатами

$$x_0=-\frac{b}{2a},\quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (C)$$

Подставляя эти значения x_0 и y_0 в формулы (12, 1), получим

$$x=x_1-\frac{b}{2a},\qquad y=y_1+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

или

$$x_1=x+\frac{b}{2a},\quad y_1=y-\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (D)$$

В новой системе координат уравнение (B) перепишется так:

$$y_1 = ax_1^2. \qquad (E)$$

Этим и заканчивается преобразование исходного уравнения.

Легко заметить, что полученное уравнение (E) действительно значительно проще исходного: в нем нет первой степени текущей координаты x_1 и нет свободного члена.

Таким образом, требование задачи выполнено: 1) преобразованное уравнение не содержит члена с первой степенью абсциссы и 2) оно не содержит свободного члена.

Полученное уравнение $y_1 = ax_1^2$ есть уравнение параболы, вершина которой находится в новом начале координат — точке $O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Мы можем сделать такое заключение:

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ *при* $a \neq 0$ *является парабола, вершина которой находится в точке* $O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, *а ее ось симметрии параллельна оси* Oy. Для построения этой параболы следует:

1) определить координаты ее вершины O_1;

2) точку O_1 принять за новое начало координат и через нее провести координатные оси O_1x_1 и O_1y_1, параллельные первоначальным осям координат и одинаково с ними направленные;

3) в новой системе координат построить параболу $y_1 = ax_1^2$.

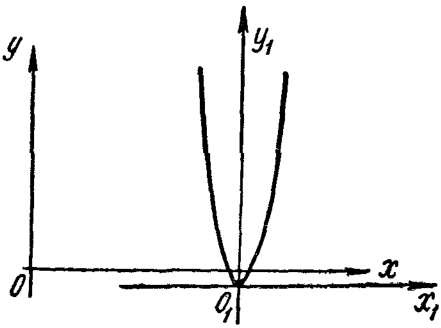
Не следует запоминать координаты вершины параболы — формулы (C), а проделывать каждый раз указанные простые выкладки. Решение последующих задач основано на выделении полного квадрата из квадратного трехчлена, а потому эта операция должна быть хорошо усвоена. После решения нескольких задач эти преобразования не будут вызывать никаких затруднений.

Решенная нами задача иногда формулируется иначе: уравнение кривой $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) упростить так, чтобы в нем отсутствовал член с первой степенью текущей координаты и свободный член, а иногда и еще короче: привести уравнение кривой $y = ax^2 + bx + c$ к каноническому виду. В дальнейшем мы будем пользоваться и этими формулировками. После того как показано, что уравнение $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу, можно заключить: упрощение этого уравнения достигнуто параллельным переносом первоначальной системы координат так, что новое начало координат находится в вершине параболы, а новая координатная ось O_1y_1 совпадает с осью симметрии параболы.

Следует также иметь в виду, что если в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ коэффициент a положителен, то ветвь параболы направлена вверх (так называемая «восходящая» парабола), а при отрицательном a — вниз («нисходящая» парабола).

Форма параболы определяется только коэффициентом a. Числа же b и c на форму параболы влияния не оказывают, и изменение их при одном и том же a влияет только на расположение параболы на плоскости. Заметим также, что чем больше a по абсолютной величине, тем сильнее парабола прижата к оси симметрии; наоборот, чем меньше a по абсолютной величине, тем «шире» будет парабола.

Решим теперь ряд задач с числовыми значениями a, b и c и начертим эскизы нескольких парабол (с построением эскиза параболы по ее уравнению приходится очень часто встречаться, например, при изучении сопротивления материалов).



Фиг. 12,2.

Задача 12, 6. Упростить уравнение параболы $y = x^2 - 7x + 12$, найти координаты ее вершины и начертить эскиз кривой.

Решение. Выделим в правой части уравнения $y = x^2 - 7x + 12$ полный квадрат по способу, указанному в предыдущей задаче, и получим

$$y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12,$$

или

$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

Положим

$$x_1 = x - \frac{7}{2}, \quad y_1 = y + \frac{1}{4}.$$

Отсюда из сравнения с формулами (12, 2) координаты нового начала, т. е. вершины параболы, будут $x_0 = \frac{7}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{4}$. После переноса начала координат в точку $O_1\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ уравнение параболы примет наиболее простой вид $y_1 = x_1^2$. Эскиз кривой представлен на фиг. 12, 2.

Задача 12, 7. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$y = 2x^2 + 4x + 5$$

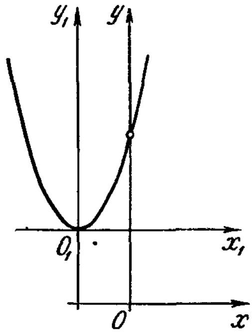
и найти координаты ее вершины.

Решение. Уравнение $y = 2x^2 + 4x + 5$ преобразуем, выделив в правой части полный квадрат:

$$y = 2(x^2 + 2x) + 5, \quad y = 2[(x+1)^2 - 1] + 5, \quad y = 2(x+1)^2 + 3,$$

$$y - 3 = 2(x+1)^2;$$

пусть теперь $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 3$. Из сравнения с формулами (12, 2) координаты нового начала: $x_0 = -1$; $y_0 = 3$. Уравнение параболы примет вид $y_1 = 2x_1^2$. Эскиз параболы показан на фиг. 12, 3.



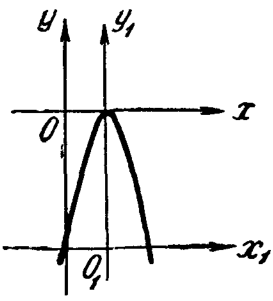
Фиг. 12,3.

Задача 12, 8 (для самостоятельного решения). Уравнение параболы $y = -3x^2 + 8x - 9$ преобразовать к простейшему виду и начертить ее эскиз.

Ответ. Вершина параболы находится в точке $\left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}\right)$. Преобразованное уравнение будет иметь вид $y_1 = -3x_1^2$. Знак минус у коэффициента при x_1^2 указывает на то, что парабола — «нисходящая» (фиг. 12, 4).

Самостоятельно решите несколько аналогичных задач и обязательно начертите эскизы этих парабол.

Задача 12, 9 (для самостоятельного решения). Преобразовать к простейшему виду уравнения парабол: 1) $y = 5x^2 + 4x - 3$ 2) $y = -6x^2 + 3x + 1$; 3) $y = 2x^2 + 3x$; 4) $y = -x^2 + 2x$; 5) $y = 3x^2 + 9x - 1$. Начертить эскизы этих парабол.



Фиг. 12,4.

Ответ. Координаты вершины:

1) $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{19}{5}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{8}\right)$; 3) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$;

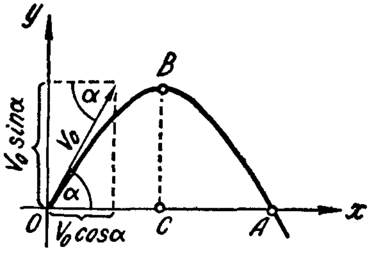
4) $(1, 1)$; 5) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{31}{4}\right)$.

Задача 12, 10. Из точки O под углом α к горизонту брошена материальная точка с начальной скоростью $\overline{v}_0$. Найти: 1) уравнение траектории полета, 2) высоту подъема; 3) дальность полета (сопротивление воздуха в расчет не принимать).

Решение. Прежде всего определим траекторию полета. Пусть в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат (фиг. 12, 5). Проекции начальной скорости на оси прямоугольной системы координат равны.

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

По прошествии t секунд точка в горизонтальном направлении пройдет путь $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ (так как скорость ее в горизонтальном направлении v_{0x} — постоянна и равна $v_0 \cos\alpha$). В вертикальном направлении точка пройдет за то же время t путь, который мы получим, если из пройденного в вертикальном направлении пути $v_0 \sin\alpha \cdot t$ отнимем $\frac{gt^2}{2}$ — расстояние на которое опустится точка под действием силы притяжения земли. Значит, в вертикальном направлении за время t будет пройден путь



Фиг 12,5

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнения $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$

и являются уравнениями траектории полета точки. Мы замечаем, что обе координаты x и y выражены здесь через одну и ту же переменную величину t. В этом случае говорят, что мы имеем параметрические уравнения траектории* (у нас параметром является время t). Желая найти зависимость между координатами x и y, исключим из этих уравнений параметр t. Из первого уравнения следует, что $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Подставим это значение t во второе уравнение и получим

$$y = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha},$$

или

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x. \qquad (A)$$

Положим

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = a, \quad \operatorname{tg}\alpha = b,$$

и тогда

$$y = -ax^2 + bx.$$

* С параметрическими уравнениями линий мы будем часто встречаться в математическом анализе. В учебнике Привалова это вопрос освещен в § 5 гл. II.

Легко усмотреть, что это уравнение параболы и, следовательно, траекторией точки является парабола. Так как в ее уравнении отсутствует свободный член, то парабола проходит через начало координат. Найдем теперь высоту полета точки. Для этого определим ординату вершины параболы. Так как коэффициент при x^2 отрицателен, то парабола — «нисходящая», а вершина параболы будет ее наивысшей точкой.

Из уравнения траектории $y = -ax^2 + bx$ найдем, что абсцисса вершины $x_0 = \frac{b}{2a}$.

Подставляя сюда

$$a = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad b = \operatorname{tg} \alpha,$$

получим

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

После подстановки этого значения x_0 в уравнение траектории (A) получим ординату вершины параболы и тем самым высоту полета

$$y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Как легко усмотреть, дальность полета l равна удвоенной абсциссе вершины, т. е. $l = 2x_0$, или $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Дальность полета l будет наибольшей, если $\sin 2\alpha$, входящий в выражение l, будет иметь наибольшее значение, т. е. при $\sin 2\alpha = 1$, а тогда $\alpha = 45°$.

Задача 12.11. Упростить уравнение кривой

$$3x + 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Указание. Привести уравнение к виду

$$x = -\frac{2}{3}y^2 - 2y + \frac{1}{3}$$

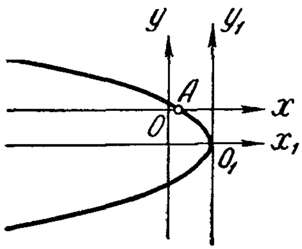
и поступить так же, как в предыдущих задачах.

Ответ. Кривая — парабола $y_1^2 = -\frac{3}{2}x_1$; вершина параболы в точке $\left(\frac{11}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ (фиг. 12, 6). Ось параболы параллельна оси абсцисс.

Задача 12, 12 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ и начертить ее эскиз.

Ответ. Простейшее уравнение кривой $y_1^2 = -\frac{1}{3}x_1$, координаты вершины параболы $O_1\left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Ось параболы параллельна оси абсцисс.

Мы выполнили ряд упражнений на упрощение уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$ и видели, что упрощение этого уравнения достигается параллельным переносом координатных осей без изменения их направления так, что новое начало координат находится в вершине параболы. Этим же преобразованием координат (т. е. параллельным переносом) можно привести к простейшему (каноническому) виду уравнение любой линии второго порядка, если это уравнение не содержит члена с произведением текущих координат. Сейчас мы выполним ряд таких упражнений.



Фиг. 12,6.

Задача 12, 13. Привести к простейшему виду уравнение

$$x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0.$$

Решение. Соберем члены уравнения, содержащие одну и ту же переменную величину, и получим

$$(x^2 - 5x) + (2y^2 + 4y) - 6 = 0.$$

Из второй скобки вынесем коэффициент при y^2, после чего предыдущее уравнение примет вид

$$(x^2 - 5x) + 2(y^2 + 2y) - 6 = 0.$$

В каждой из скобок выделим полный квадрат и получим

$$\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] + 2[(y+1)^2 - 1] - 6 = 0,$$

или

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2(y+1)^2 - \frac{25}{4} - 2 - 6 = 0,$$

откуда следует, что

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2(y+1)^2 = \frac{57}{4}. \qquad (A)$$

Произведем теперь такую замену: положим, что

$$x_1 = x - \frac{5}{2}, \quad y_1 = y + 1.$$

Произведенная замена представляет собою не что иное, как преобразование координат всех точек плоскости параллельным переносом координатных осей без изменения их направления. Сравнение последних соотношений с формулами (12, 2) показывает, что новое начало координат находится в точке $O_1\left(\frac{5}{2}, -1\right)$, а уравнение ($A$) принимает вид

$$x_1^2+2y_1^2=\frac{57}{4}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\frac{57}{4}$, получим канонический (простейший) вид данного уравнения

$$\frac{x_1^2}{\frac{57}{4}}+\frac{y_1^2}{\frac{57}{8}}=1.$$

Заданное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=\frac{\sqrt{57}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{57}}{2\sqrt{2}}$, центр которого находится в первоначальной системе координат в точке $O_1\left(\frac{5}{2}, -1\right)$. Таким образом, упрощение уравнения этой линии достигнуто параллельным переносом начала координат в ее центр.

Задача 12, 14 (для самостоятельного решения). Упростить параллельным переносом координатных осей без изменения их направления уравнение линии $x^2-3y^2+4x-5y+1=0$.

Ответ. Линия — гипербола. Центр ее находится в точке $O_1\left(-2, -\frac{5}{6}\right)$. Ее каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{\frac{11}{12}}-\frac{y_1^2}{\frac{11}{36}}=1.$$

Задача 12, 15 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой

$$2x^2+3y^2-x+y=0.$$

Ответ. Кривая — эллипс с центром в точке $O_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$ в исходной системе координат. Простейшее уравнение кривой

$$\frac{x_1^2}{\frac{5}{48}}+\frac{y_1^2}{\frac{5}{72}}=1.$$

Задача 12, 16 (для самостоятельного решения). Привести к каноническому виду уравнение линии

$$4x^2-y^2-8x-6y-9=0.$$

Ответ. Линия — гипербола с центром в точке O_1 (1, —3) в исходной системе координат. Каноническое уравнение линии

$$x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

В задачах 12, 14 — 12, 16, как и в задаче 12, 13, упрощение уравнений линий достигнуто параллельным переносом начала координат в центр этих линий.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование координат поворотом координатных осей без изменения начала координат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если φ — угол поворота, x и y — первоначальные координаты точки, x_1 и y_1 — координаты той же точки в новой, повернутой системе координат, то имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y &= x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (13, 1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (13, 2)$$

Задача 13, 1. Чему будут равны координаты точки $A\left(\sqrt{3}, 2\right)$, если повернуть оси координат на угол $+60°$ без изменения начала координат.

Решение. Воспользуемся формулами (13, 2). Тогда так как

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$y_1 = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}; \quad y_1 = -\frac{1}{2}.$$

Задача 13, 2. Координатные оси прямоугольной системы координат переносятся без изменения направления осей в точку O_1 (3, —1) и поворачиваются на угол 30°. Найти новые координаты точки A, если старые ее координаты были A (3, 4) (фиг. 13, 1).

1) Сначала перенесем параллельно координатные оси, не изменяя их направления, в точку (3, —1). По формулам (12, 2) получаем $x_1 = 0$; $y_1 = 5$.