Ответ. Линия — гипербола с центром в точке O_1 (1, —3) в исходной системе координат. Каноническое уравнение линии

$$x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

В задачах 12, 14 — 12, 16, как и в задаче 12, 13, упрощение уравнений линий достигнуто параллельным переносом начала координат в центр этих линий.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование координат поворотом координатных осей без изменения начала координат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если φ — угол поворота, x и y — первоначальные координаты точки, x_1 и y_1 — координаты той же точки в новой, повернутой системе координат, то имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y &= x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (13, 1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (13, 2)$$

Задача 13, 1. Чему будут равны координаты точки $A\left(\sqrt{3}, 2\right)$, если повернуть оси координат на угол $+60°$ без изменения начала координат.

Решение. Воспользуемся формулами (13, 2). Тогда так как

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$y_1 = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}; \quad y_1 = -\frac{1}{2}.$$

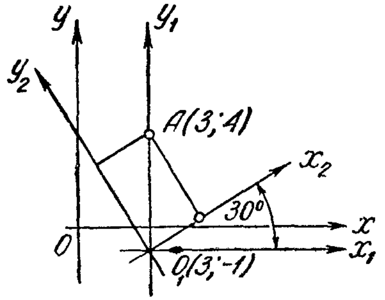
Задача 13, 2. Координатные оси прямоугольной системы координат переносятся без изменения направления осей в точку O_1 (3, —1) и поворачиваются на угол 30°. Найти новые координаты точки A, если старые ее координаты были A (3, 4) (фиг. 13, 1).

1) Сначала перенесем параллельно координатные оси, не изменяя их направления, в точку (3, —1). По формулам (12, 2) получаем $x_1 = 0$; $y_1 = 5$.

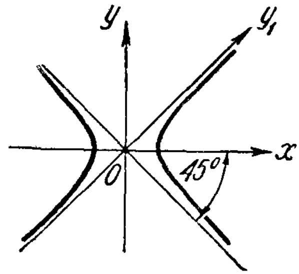
2) Повернем теперь оси координат $x_1O_1y_1$ на 30°; координаты точки в системе координат $x_2O_1y_2$ найдутся по формулам (13, 2), в которых надо заменить x_1 на x_2, y_1 на y_2, x на x_1, а y на y_1. Получаем

$$x_2 = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi,$$
$$y_2 = -x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Подставляя в эти формулы $\sin\varphi = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \cos 30° =$



Фиг. 13,1.



Фиг. 13,2.

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_1 = 0$; $y_1 = 5$, будем иметь искомые координаты точки

$$x_2 = \frac{5}{2}; \quad y_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Определение. *Гипербола, определяемая уравнением* $x^2 - y^2 = a^2$, *называется равносторонней.*

Задача 13, 3. Какой вид примет уравнение равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, если оси координат повернуть на угол $\varphi = -45°$ (фиг. 13, 2)?

Решение. Так как $\varphi = -45°$, то

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = x_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1);$$

$$y = -x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + y_1 \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1).$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, будем иметь

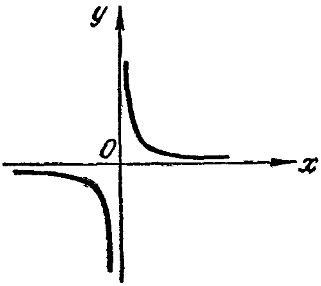
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1)\right]^2 = a^2,$$

или

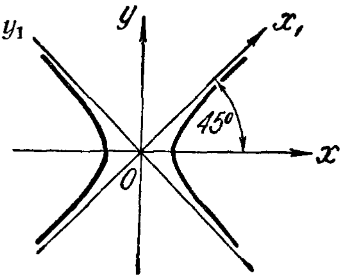
$$\frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2-(y_1-x_1)^2]=a^2.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2}(x_1+y_1-y_1+x_1)(x_1+y_1+y_1-x_1)=a^2,$$



Фиг. 13,3.



Фиг. 13,4.

окончательно

$$2x_1y_1=a^2, \text{ или } x_1y_1=\frac{a^2}{2}.$$

Это и есть искомое преобразованное уравнение равносторонней гиперболы. Так как у равносторонней гиперболы $b=a$, то уравнения ее асимптот $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ при $b=a$ примут вид $y=x$ и $y=-x$.

Эти прямые перпендикулярны и являются биссектрисами 1-го и 2-го координатных углов. Значит, если асимптоты равносторонней гиперболы принять за координатные оси, то уравнение равносторонней гиперболы (если опустить индексы у x_1 и y_1) примет вид

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

Это уравнение носит название уравнения равносторонней гиперболы относительно ее асимптот (фиг. 13, 3). Его следует запомнить.

Если бы мы сделали поворот осей не на $-45°$, а на $+45°$ (фиг. 13, 4), то уравнение гиперболы приняло бы вид

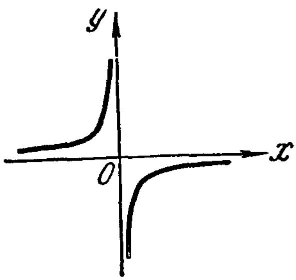
$$x_1y_1=-\frac{a^2}{2}.$$

Опуская индексы в уравнении $x_1y_1=-\frac{a^2}{2}$, мы получили бы уравнение равносторонней гиперболы относительно ее асимптот в виде $xy=-\frac{a^2}{2}$. Запомните, что ветви гиперболы $xy=\frac{a^2}{2}$ расположены в первой и третьей четвертях (фиг. 13, 3), ветви же гиперболы $xy=-\frac{a^2}{2}$ находятся во второй и четвертой четвертях (фиг. 13, 5).

Геометрический смысл дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{A}$$

Определение. *Функция вида* $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ *называется дробно-линейной* (предполагается, что $ad-bc\neq 0$, так как, если $ad-bc=0$, то $ad=bc$, и тогда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$). Обозначая общую величину этих отношений через t, мы имели бы



Фиг. 13,5.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=t,$$

откуда $a=bt$, $c=dt$. Подставляя эти значения a и c в уравнение (A), мы получили бы, что

$$y=\frac{btx+b}{dtx+d}=\frac{b(tx+1)}{d(tx+1)}=\frac{b}{d},$$

и уравнение не содержало бы x. Уравнение (A) определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой параллельны координатным осям. Ниже даются упражнения на преобразование уравнения (A) к уравнению, в котором нет членов первого измерения.

Преобразованное уравнение может получить вид либо $xy=\frac{a^2}{2}$, либо $xy=-\frac{a^2}{2}$.

Напомним, что уравнение $xy=\frac{a^2}{2}$ определяет гиперболу, асимптоты которой служат координатными осями, а ветви расположены в первой и третьей четвертях; уравнение $xy=-\frac{a^2}{2}$ определяет гиперболу, у которой асимптоты служат координатными осями, а ветви расположены во второй и четвертой четвертях.

Задача 13, 4. Преобразовать дробно-линейную функцию $y=\frac{2x+3}{3x+4}$ так, чтобы в преобразованном виде она не содержала членов первого измерения, и начертить эскиз кривой.

Эту задачу мы решим более простым способом, чем тот, который указан в учебнике. Числитель дроби $2x+3$ в правой части уравнения разделим на ее знаменатель $3x+4$ по правилам деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & 3x+4 \\ \cline{2-2} -\;2x+\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \cline{1-1} \frac{1}{3} & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+4}.$$

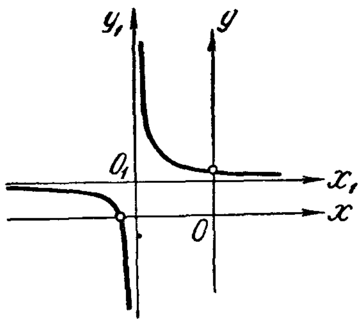
В знаменателе второй дроби в правой части этого равенства вынесем за скобки 3 и получим, что правая часть данного уравнения может быть записана так:

$$\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)},$$

а данное уравнение приобретает вид

$$y=\frac{2}{3}+\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)},$$

$$\text{или}\; y-\frac{2}{3}=\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)}.$$



Фиг. 13,6.

Обозначим теперь $x_1=x+\frac{4}{3}$; $y_1=y-\frac{2}{3}$. Тогда из сравнения этих соотношений с формулами (12, 2) получаем, что $x_0=-\frac{4}{3}$, $y_0=\frac{2}{3}$, а в преобразованном виде данное уравнение запишется так:

$$y_1=\frac{1}{9x_1}, \quad \text{или} \quad x_1y_1=\frac{1}{9} \quad (\text{фиг. } 13,6).$$

Этим же способом преобразуйте уравнение

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

так, чтобы в упрощенном виде оно не содержало членов первого измерения (при этом преобразовании считать $c\neq 0$). Должно получиться

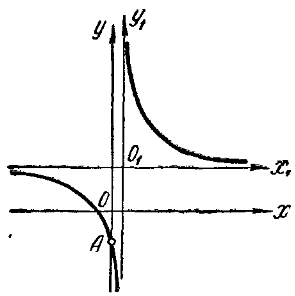
$$y-\frac{a}{c}=\frac{bc-cd}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}},$$

а полагая $x + \frac{d}{c} = x_1$ и $y - \frac{a}{c} = y_1$, будем иметь

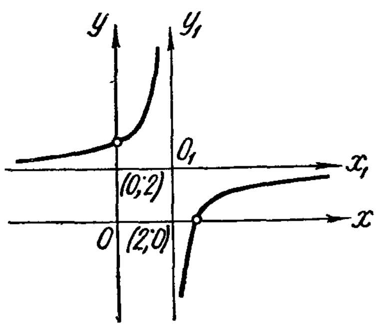
$$y_1 = \frac{bc - cd}{c^2} \cdot \frac{1}{x_1}.$$

Новое начало координат находится в точке с координатами $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$.

Задача 13, 5 (для самостоятельного решения). Уравнение $y = \frac{5x+2}{2x-1}$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде оно



Фиг. 13,7.



Фиг. 13,8.

не содержало членов первого измерения, и начертить эскиз кривой.

Ответ. $x_1 y_1 = \frac{9}{4}$.

Это уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к асимптотам. Ветви кривой находятся в первой и третьей четвертях новой системы координат. Новое начало координат находится в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ — фиг. 13,7.

Задача 13, 6 (для самостоятельного решения). Дробно-линейную функцию $y = \frac{6x-17}{3x-6}$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде уравнение не содержало членов первого измерения, начертить эскиз кривой и найти уравнения асимптот.

Ответ. $x_1 y_1 = -\frac{5}{3}$; $x_0 = 2$, $y_0 = 2$.

Кривая — равносторонняя гипербола, ветви которой расположены во второй и четвертой четвертях новой системы координат. Эскиз кривой представлен на фиг. 13,8. Уравнения асимптот: $x = 2$ и $y = 2$.

Задача 13, 7 (для самостоятельного решения). Преобразовать дробно-линейные функции

1) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

2) $y = \frac{2-2x}{x+1}$,

3) $y = \frac{3x+1}{x+2}$

так, чтобы в преобразованном виде они не содержали членов первого измерения, найти уравнения асимптот и начертить эскизы кривых.

Ответ.

Преобразованные уравнения кривых	Координаты нового начала	Уравнения асимптот
1) $x_1y_1 = -3$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 1$;	$x = -2$; $y = 1$;
2) $x_1y_1 = 4$;	$x_0 = -1$; $y_0 = -2$;	$x = -1$; $y = -2$;
3) $x_1y_1 = -5$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 3$;	$x = -2$; $y = 3$.

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Упрощение общего уравнения кривой второго порядка

На двух последних занятиях мы достигали упрощения уравнения кривой параллельным переносом (задачи 12, 4—12, 16), а в задаче 13, 3 уравнение кривой было преобразовано поворотом координатных осей без изменения начала координат.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Задача упрощения этого уравнения состоит в том, чтобы в преобразованном уравнении были устранены. 1) член, содержащий произведение текущих координат, и 2) члены, содержащие первые степени двух координат или, по крайней мере, одной из них.

Новая программа по высшей математике для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей втузов не предусматривает изложения в общем виде вопроса об упрощении уравнения кривых второго порядка и изучения инвариантов.