Задача 13, 7 (для самостоятельного решения). Преобразовать дробно-линейные функции

1) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

2) $y = \frac{2-2x}{x+1}$,

3) $y = \frac{3x+1}{x+2}$

так, чтобы в преобразованном виде они не содержали членов первого измерения, найти уравнения асимптот и начертить эскизы кривых.

Ответ.

Преобразованные уравнения кривых	Координаты нового начала	Уравнения асимптот
1) $x_1y_1 = -3$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 1$;	$x = -2$; $y = 1$;
2) $x_1y_1 = 4$;	$x_0 = -1$; $y_0 = -2$;	$x = -1$; $y = -2$;
3) $x_1y_1 = -5$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 3$;	$x = -2$; $y = 3$.

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Упрощение общего уравнения кривой второго порядка

На двух последних занятиях мы достигали упрощения уравнения кривой параллельным переносом (задачи 12, 4—12, 16), а в задаче 13, 3 уравнение кривой было преобразовано поворотом координатных осей без изменения начала координат.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

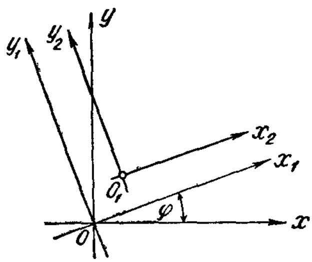
Задача упрощения этого уравнения состоит в том, чтобы в преобразованном уравнении были устранены. 1) член, содержащий произведение текущих координат, и 2) члены, содержащие первые степени двух координат или, по крайней мере, одной из них.

Новая программа по высшей математике для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей втузов не предусматривает изложения в общем виде вопроса об упрощении уравнения кривых второго порядка и изучения инвариантов.

Поэтому мы приведем решение только нескольких задач. Из них учащийся уяснит методы, с помощью которых достигается упрощение уравнений линий второго порядка.

Случаи упрощения уравнения кривой второго порядка, когда оно не содержит произведения текущих координат, были разобраны раньше.

В том случае, когда уравнение линии второго порядка содержит произведение текущих координат, упрощение его следует начинать с поворота осей без изменения начала координат и надлежащим выбором угла поворота добиться того, чтобы из преобразованного уравнения был устранен член, содержащий произведение текущих координат. Преобразование координат в этом случае будем вести по формулам



Фиг. 14,1.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \\ y &= x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Если после устранения из преобразованного уравнения члена с произведением текущих координат в нем останутся члены с первыми степенями текущих координат, то последующим параллельным переносом осей можно, как это было показано, привести уравнение к каноническому виду.

Координатную систему, полученную в результате поворота первоначальной системы координат, будем обозначать через x_1Oy_1, а систему координат, полученную от параллельного переноса координат системы x_1Oy_1,— через $x_2O_1y_2$ (см. фиг. 14, 1).

Задача 14, 1. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение. Начнем с поворота осей. Целью этого преобразования, как вы уже знаете, является уничтожение в преобразованном уравнении члена, содержащего произведение текущих координат. Формулы преобразования координат поворотом осей без изменения начала координат имеют вид

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$

$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Подставляя эти значения x и y в заданное уравнение, будем иметь

$$5(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 + 4(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)\cdot(x_1\sin\varphi +$$
$$+ y_1\cos\varphi) + 8(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 - 32(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi) -$$
$$- 56(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + 80 = 0.$$

Раскроем скобки и получим

$$5x_1^2\cos^2\varphi - 10x_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 5y_1^2\sin^2\varphi + 4x_1^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi -$$
$$- 4x_1y_1\sin^2\varphi + 4x_1y_1\cos^2\varphi - 4y_1^2\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+ 8x_1^2\sin^2\varphi + 16x_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 8y_1^2\cos^2\varphi -$$
$$- 32x_1\cos\varphi + 32y_1\sin\varphi - 56x_1\sin\varphi -$$
$$- 56y_1\cos\varphi + 80 = 0.$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$(5\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\sin^2\varphi)x_1^2 + (6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi +$$
$$+ 4\cos^2\varphi)x_1y_1 + (5\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\cos^2\varphi)y_1^2 -$$
$$- (32\cos\varphi + 56\sin\varphi)x_1 + (32\sin\varphi -$$
$$- 56\cos\varphi)y_1 + 80 = 0. \qquad (A)$$

Выберем теперь угол поворота φ так, чтобы коэффициент при x_1y_1 обратился в нуль. Приравнивая этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения значения угла φ, при котором этот коэффициент обратится в нуль:

$$6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2\varphi$ ($\cos\varphi \neq 0$, так как если $\cos\varphi = 0$, то $\sin\varphi = \pm 1$, и тогда это уравнение не имеет места, ибо получается, что $-4 = 0$. Это замечание следует помнить и при решении последующих задач). После деления получим

$$\frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi} - 4\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} + 4 = 0,$$

или после упрощений

$$2\operatorname{tg}^2\varphi - 3\operatorname{tg}\varphi - 2 = 0.$$

Отсюда получаем для тангенса угла φ поворота координатных осей такие значения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4},$$

или

$$(\operatorname{tg}\varphi)_1 = 2 \text{ и } (\operatorname{tg}\varphi)_2 = -\frac{1}{2}.$$

Эти два значения $\operatorname{tg}\varphi$ соответствуют двум взаимно-перпендикулярным направлениям, так как произведение этих тангенсов равно -1. Из $(\operatorname{tg}\varphi) = 2$ следует, что угол поворота φ может находиться в первой или третьей четвертях, а из $(\operatorname{tg}\varphi) = -\frac{1}{2}$ следует, что угол поворота φ может находиться во второй или четвертой четвертях. Условимся всегда брать для $\operatorname{tg}\varphi$ из двух возможных значений — положительное, а угол поворота φ — в первой четверти $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, из двух возможных значений тангенса берем $\operatorname{tg}\varphi=2$. Определим по известному $\operatorname{tg}\varphi$ величину $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Это нам нужно для того, чтобы определить коэффициенты при x_1^2, y_1^2, x_1 и y_1 в уравнении (A).

Так как у нас $\operatorname{tg}\varphi>0$, а угол φ находится в первой четверти, то по известному $\operatorname{tg}\varphi$ функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ могут быть определены следующим образом:

$$\sin\varphi=+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\quad \cos\varphi=+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Из этого следует, что $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\sin^2\varphi=\frac{4}{5},\quad \cos^2\varphi=\frac{1}{5},\quad \sin\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{2}{5}.$$

При найденных значениях $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ коэффициент при x_1^2 равен 9, коэффициент при x_1y_1 — нулю, при y_1^2 равен 4, коэффициент при x_1 равен $-\frac{144}{\sqrt{5}}$, а при y_1 равен $\frac{8}{\sqrt{5}}$. Подставляя эти значения в уравнение (A) и поступая так же, как в задаче 12, 13, получим

$$9\left(x_1^2-\frac{16}{\sqrt{5}}x_1\right)+4\left(y_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)+80=0.$$

Выделяя в скобках полные квадраты, имеем

$$9\left[\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{64}{5}\right]+4\left[\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}\right]+80=0,$$

откуда

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+80=0,$$

или

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=36. \qquad (B)$$

Сделаем теперь параллельный перенос координатной системы x_1Oy_1 (фиг. 14, 1).

Формулы преобразования, аналогичные формулам (12, 1) и (12, 2), запишем так:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_2+x_0\\ y_1&=y_2+y_0\end{aligned}\right\} \qquad (14, 1)$$

и

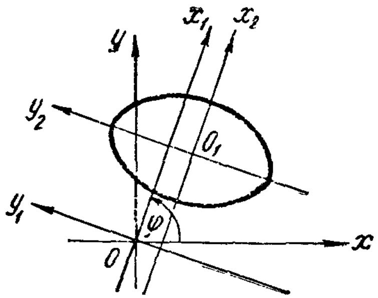
$$\left.\begin{aligned} x_2&=x_1-x_0\\ y_2&=y_1-y_0\end{aligned}\right\} \qquad (14, 2)$$

Теперь в уравнение (B) введем обозначения: $x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}$; $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$; из сравнения с формулами (14, 2) заключаем, что $x_0 = +\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а уравнение ($B$) перепишем так:

$$9x_2^2 + 4y_2^2 = 36.$$

После деления обеих частей равенства на 36 получим данное уравнение в каноническом виде:

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$



Фиг. 14,2.

Итак, данное уравнение определяет эллипс. Он вытянут вдоль оси O_1y_2. Эскиз кривой показан на фиг. 14, 2. Докажите, что точка O_1 — центр эллипса в исходной системе координат имеет координаты (2, 3)*.

Ниже помещено для самостоятельного решения несколько задач с подробными ответами и указаниями. Эти задачи следует решать так же, как и задачу 14, 1. При решении их следует считать, что угол поворота находится в первой четверти, и, значит, из двух возможных значений $\operatorname{tg} \varphi$ надо брать положительное.

Учащимся рекомендуется ознакомиться не только с приведенным, но и с более совершенным методом упрощения общего уравнения кривой второго порядка, изложенным в учебниках И. И. Привалова и Н. В. Ефимова.

Задача 14, 2 (для самостоятельного решения).

Упростить уравнение кривой

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0.$$

Ответ. Кривая — гипербола. Каноническое уравнение ее

$$\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{4} = 1 \text{ (фиг. 14,3).}$$

---

* Принимая во внимание, что $x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi$; $y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi$, а $x_1 = x_2 + x_0$; $y_1 = y_2 + y_0$, получаем, что

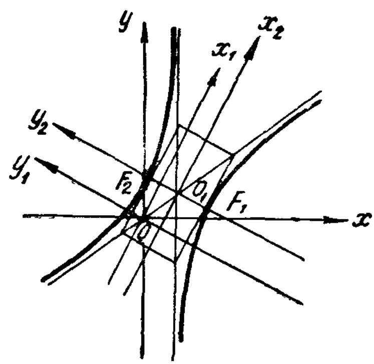
$$x = (x_2 + x_0)\cos\varphi - (y_2 + y_0)\sin\varphi;$$

$$y = (x_2 + x_0)\sin\varphi + (y_2 + y_0)\cos\varphi.$$

Указание. Уравнение для определения $\operatorname{tg}\varphi$ имеет вид $2\operatorname{tg}^2\varphi - 3\operatorname{tg}\varphi - 2 = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 2$, $0° < \varphi < 90°$. После поворота первоначальной координатной системы на угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = 2$, уравнение приобретает вид

$$x_1^2 - 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 + 5 = 0.$$

В системе координат x_1Oy_1 координаты центра гиперболы $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

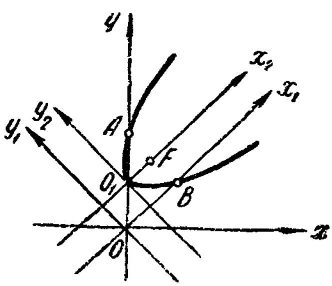


Фиг. 14,3.

Задача 14, 3 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0.$$

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_2$ (фиг. 14,4). Для определения $\operatorname{tg}\varphi$ получим уравнение $2\operatorname{tg}^2\varphi + 3\operatorname{tg}\varphi - 2 = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$; $0° < \varphi < 90°$. После поворота первоначальной координатной системы на угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, уравнение приобретет вид $5y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{10}{\sqrt{5}}y_1 + 2 = 0$.



Фиг. 14,4.

В системе координат x_1Oy_1 координаты вершины параболы $O_1\left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Задача 14, 4 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$$

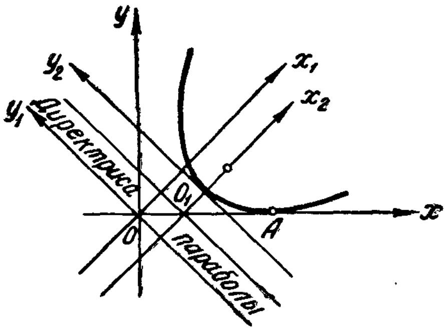
и найти координаты фокуса в исходной системе координат.

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = 2\sqrt{2}x_2$ (фиг. 14, 5); $\operatorname{tg}\varphi = 1$; $\varphi = 45°$. После поворота первоначальной координатной системы на этот угол уравнение примет вид

$$2y_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}y_1 + 9 = 0.$$

В системе координат x_1Oy_1 вершина параболы имеет координаты $O_1\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, координаты фокуса в исходной системе координат F (2, 1).

Задача 14, 5. Привести к простейшему виду уравнение



Фиг. 14,5.

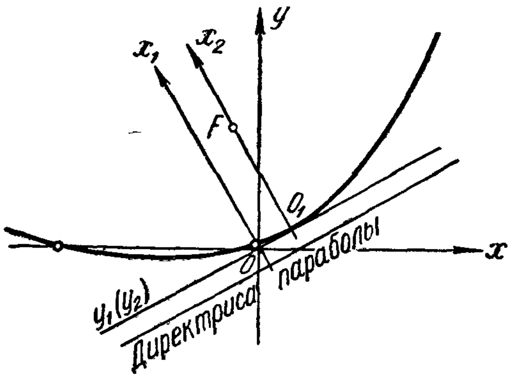
$$9x^2+24\,xy+16y^2+50x-$$
$$-100y+25=0.$$

Найти уравнение директрисы и координаты фокуса в первоначальной системе координат.

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2=4x_2$ (фиг. 14, 6). В первоначальной системе координат фокус параболы имеет координаты $F\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$, а уравнение директрисы $4x-3y-5=0$.

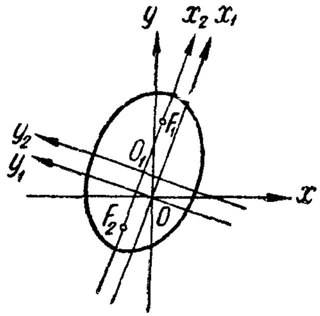
Задача 14, 6. Упростить уравнение кривой

$$8x^2-4xy+5y^2+4x-10y-319=0.$$

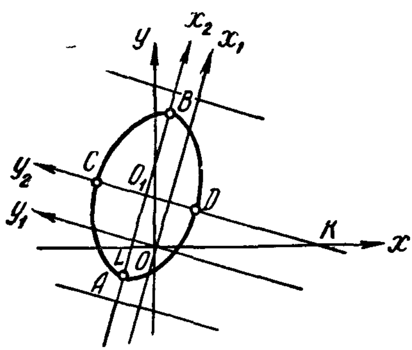


Фиг. 14, 6.

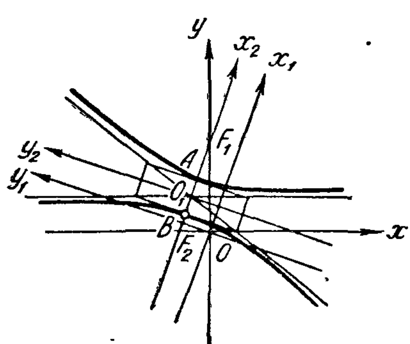
Ответ. Кривая — эллипс. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{81}+\frac{y_2^2}{36}=1$. В системе координат x_1Oy_1 центр эллипса имеет координаты $O_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (см. фиг. 14,7).



Фиг. 14,7.



Фиг. 14,8.



Фиг. 14,9.

Задача 14, 7. Упростить уравнение линии

$$34x^2 - 12xy + 18y^2 + 24x - 72y - 504 = 0.$$

Найти в первоначальной системе координат уравнения осей симметрии.

Ответ. Кривая — эллипс. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{36} + \frac{y_2^2}{16} = 1$ (фиг. 14, 8). Уравнение осей симметрии

$$3x - y + 2 = 0; \quad x + 3y - 6 = 0.$$

Задача 14, 8. Упростить уравнение линии

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Ответ. Кривая — гипербола. Ее каноническое уравнение $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{9} = 1$ (фиг. 14, 9).

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определители и системы линейных алгебраических уравнений.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Вычисление определителей основывается на их известных свойствах, которые относятся к определителям всех порядков. Вот эти свойства:

1. Если переставить две строки (или два столбца) определителя, то определитель изменит знак.

2. Если соответствующие элементы двух столбцов (или двух строк) определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

3. Значение определителя не изменится, если поменять местами строки и столбцы, сохранив их порядок.

4. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число. Для определителей третьего порядка это свойство может быть записано, например, так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$