Задача 14, 7. Упростить уравнение линии

$$34x^2 - 12xy + 18y^2 + 24x - 72y - 504 = 0.$$

Найти в первоначальной системе координат уравнения осей симметрии.

Ответ. Кривая — эллипс. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{36} + \frac{y_2^2}{16} = 1$ (фиг. 14, 8). Уравнение осей симметрии

$$3x - y + 2 = 0; \quad x + 3y - 6 = 0.$$

Задача 14, 8. Упростить уравнение линии

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Ответ. Кривая — гипербола. Ее каноническое уравнение $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{9} = 1$ (фиг. 14, 9).

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определители и системы линейных алгебраических уравнений.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Вычисление определителей основывается на их известных свойствах, которые относятся к определителям всех порядков. Вот эти свойства:

1. Если переставить две строки (или два столбца) определителя, то определитель изменит знак.

2. Если соответствующие элементы двух столбцов (или двух строк) определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

3. Значение определителя не изменится, если поменять местами строки и столбцы, сохранив их порядок.

4. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число. Для определителей третьего порядка это свойство может быть записано, например, так:

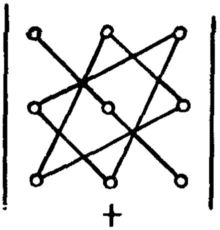
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Определитель второго порядка вычисляется по формуле

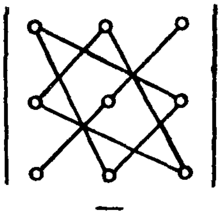
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (15,1)$$

7. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \qquad (15,2)$$



Фиг. 15,1



Фиг. 15,2

Существует удобная схема для вычисления определителя третьего порядка (см. фиг. 15, 1 и фиг. 15, 2).

По схеме, приведенной на фиг. 15, 1, произведения соединенных элементов берутся со своим знаком, а по схеме фиг. 15, 2 — с обратным. Величина определителя равна алгебраической сумме полученных шести произведений.

В определителе порядка n алгебраическим дополнением элемента, стоящего на пересечении k-го столбца и l-й строки, называется определитель порядка $(n-1)$, получаемый из данного вычеркиванием в нем строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент, причем к этому определителю присоединяется множитель $(-1)^{k+l}$, где $(k+l)$ — сумма номеров вычеркнутой строки и столбца. Алгебраическое дополнение элемента, рассматриваемое без множителя $(-1)^{k+l}$, называется минором этого элемента.

Пример. В определителе 5-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}. \qquad (15,3)$$

алгебраическим дополнением, соответствующим элементу d_3, будет определитель 4-го порядка

$$(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Здесь в показателе степени у (-1) три — номер строки, четыре — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент d_3.

8. Определитель равен сумме произведений каждого элемента некоторой строки (или столбца) на его алгебраическое дополнение.

Условимся обозначать элементы определителя маленькими буквами, а их алгебраические дополнения — соответствующими большими буквами с теми же индексами. Так, алгебраическое дополнение элемента a_3 будем обозначать через A_3, алгебраическое дополнение элемента d_4 — через D_4 и т. д. На основании свойства (8) определитель (15, 3) может быть представлен, например, в таком виде:

$$D = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3 + e_3E_3.$$

Это равенство представляет собой разложение определителя по элементам третьей строки. По свойству 8 вычисление определителя порядка n сводится к вычислению определителей порядка $(n-1)$.

9. Если все элементы какого-нибудь ряда определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому не равному нулю элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

С помощью указанных свойств можно вычислить определитель любого порядка.

Задача 15, 1. Вычислить определители

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. По формуле (15, 1) имеем

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 7 = -26,$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1.$$

Задача 15, 2 (для самостоятельного решения).
Вычислить определители

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ. 1) -32; 2) 3; 3) 5.

Задача 15,3. Вычислить определители

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. С помощью формулы (15, 2) получаем

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 4 + 0 + 12 - 40 - 0 - 1 = -25.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-2) + 7\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 3(-1) - 7\cdot 4\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot 2 = -12 - 7 + 24 + 9 + 56 - 4 = 66.$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\times 1\cdot(-3) - 2\cdot 4\cdot 1 = -12 + 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0.$$

Задача 15, 4 (для самостоятельного решения).

Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

На каждом из этих определителей проверить, что сумма произведений элементов какого-нибудь ряда на алгебраические дополнения, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю.

Ответ. 1) 120; 2) —236; 3) 15.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (15, 4)$$

Определителем этой системы называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (15, 5)$$

будем обозначать буквой D.

1. Если определитель системы не равен нулю, то система (15, 4) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (15, 6)$$

В этом случае говорят, что система — совместная или определенная.

Определители, стоящие в числителях этих дробей, будем обозначать соответственно через D_x и D_y.

Итак, значение неизвестного системы (15, 4) равно дроби, знаменатель которой есть определитель системы, а числитель есть определитель, получающийся из определителя системы заменой в нем столбца из коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.

2. Если же определитель системы D равен нулю, но, по крайней мере, один из определителей D_x и D_y в числителях формул (15, 6) не равен нулю, то система решений не имеет. В этом случае говорят, что она противоречива, или несовместна.

3. Если же равен нулю не только определитель системы, но и определители D_x и D_y, а хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то одно из уравнений системы является следствием другого, и система (15, 4) двух линейных уравнений с двумя неизвестными приводится к одному уравнению, всякое решение которого является одновременно и решением второго уравнения. В этом случае система допускает бесконечное множество решений, и о ней говорят, что она неопределенная.

II. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (15, 7)$$

Определитель
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (15, 8)$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы.

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система (15, 7) имеет решение, и притом единственное. Это решение находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad (15, 9)$$

Из этого заключаем, что значение неизвестного системы (15, 7) равно дроби, знаменатель которой есть определитель системы, *а числитель есть определитель, получающийся из определителя системы заменой в нем столбца из коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.*

Определители, стоящие в числителях дробей (15, 9), мы будем обозначать соответственно через D_x, D_y, D_z.

2. Если $D = 0$, но, по крайней мере, один из его миноров и хотя бы один из определителей D_x, D_y и D_z не равен нулю, то система (15. 7) решений не имеет. В этом случае говорят, что она противоречива, или несовместна.

3. Если $D = 0$ и все определители, стоящие в числителях дробей (15, 9),— D_x, D_y, D_z — равны нулю, т. е. если

$$D = D_x = D_y = D_z = 0,$$

но хотя бы один из миноров в определителе D не равен нулю, то одно уравнение системы (15, 7) является следствием двух других, и система трех уравнений (15, 9) приводится к двум уравнениям, причем решения этих двух уравнений удовлетворяют третьему. В этом случае система (15, 9) имеет бесконечное множество решений и называется неопределенной.

4. Если же все миноры в определителе D равны нулю, но хотя бы один из миноров в каком-нибудь из определителей D_x, D_y, D_z не равен нулю и хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то система несовместна и решений не имеет.

5. Если в определителях D, D_x, D_y, D_z все миноры равны нулю, но хотя бы один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен, то два уравнения системы являются следствием третьего, и система трех уравнений приводится к одному уравнению, является неопределенной и имеет бесконечное множество решений, причем решения этого третьего уравнения удовлетворяют первому и второму уравнениям.

Задача 15, 5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Прежде всего вычисляем определитель D системы, стоящий в знаменателях дробей формул (15, 6):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Так как $D \neq 0$, то заданная система — совместная и определенная, т. е. допускает единственное решение. Формулы для определения x и y запишем по (15, 6) так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}; \quad \begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \\ D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -21. \end{aligned}$$

Определитель, стоящий в знаменателях двух дробей, уже вычислен и равен $D = -7$;

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2; \quad x = 2;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{-7} = 3. \quad y = 3.$$

Задача 15, 6. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\}.$$

Решение. Вычисляем определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

так как $D \neq 0$, то система — совместная и определенная, т. е. допускает единственное решение. Неизвестные x и y найдутся по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}; \quad \begin{array}{l} D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8. \end{array}$$

Знаменатель этих дробей $D = 1$ был вычислен раньше:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{1} = -5; \quad x = -5;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{1} = -8; \quad y = -8.$$

Задача 15, 7 (для самостоятельного решения).
Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\}.$$

Ответ. $x = 1{,}9$; $y = -1{,}3$.

Задача 15, 8 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1) \left.\begin{array}{r} x + 4y = 12 \\ 3x - 2y = -6 \end{array}\right\}, \quad 2) \left.\begin{array}{r} 13x - 12y = -9 \\ 2x + 3y = 18 \end{array}\right\}, \quad 3) \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 12 \\ 2x + 7y = 19 \end{array}\right\}.$$

Ответ. 1) $x = 0$; $y = 3$; 2) $x = 3$; $y = 4$; 3) $x = -1$; $y = 3$.

Задача 15, 9. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{array}\right\}.$$

Решение. Составляем определитель системы $D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0$. Так как $D=0$, то система или несовместная, или неопределенная. Составляем определители, стоящие в числителях дробей формул (15, 6):

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 7 & 6\end{vmatrix}=9\neq 0.$$

Так как $D=0$, а $D_x\neq 0$, то система несовместна, т. е. решений не имеет. Геометрический смысл нашего заключения состоит в том, что уравнения, входящие в систему, есть уравнения двух параллельных прямых, а так как параллельные прямые не пересекаются, то решений предложенная система не имеет (прямые $2x+3y-5=0$ и $4x+6y-7=0$ параллельны, так как коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$).

Задача 15, 10. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}3x-4y&=5\\ 6x-8y&=10\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Составляем определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}=0.$$

Так как определитель системы равен нулю, то может оказаться, что система или вовсе не имеет решений, т. е. несовместна, или является неопределенной, т. е. допускает бесчисленное множество решений (напоминаем, что система уравнений называется совместной и определенной, когда она имеет решение, и притом единственное). В нашем случае $D=0$. Вычислим D_x и D_y:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & -4\\ 10 & -8\end{vmatrix}=-40+40=0;\ D_x=0;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 10\end{vmatrix}=30-30=0;\ D_y=0.$$

Таким образом, $D=0$, $D_x=0$ и $D_y=0$. Это значит, что система неопределенная. Действительно, если обе части второго уравнения разделить на 2, то получится первое уравнение, и система двух уравнений сводится к одному уравнению с двумя неизвестными, а именно:

$$3x-4y=5$$

и имеет бесчисленное множество решений, заключающихся в формуле

$$y=\frac{3x-5}{4}.$$

Давая произвольные значения неизвестному x, получим соответствующие значения y.

Задача 15, 11 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}15x-y=14\\12x+13y=25\end{array}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{array}{l}3x-5y=1\\6x-10y=5\end{array}\right\};\quad 3)\ \left.\begin{array}{l}2x+3y=17\\4x+6y=34\end{array}\right\}.$$

Ответ. 1) $x=y=1$; 2) система несовместна; 3) система является неопределенной.

Задача 15, 12. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r}x_1+2x_2-x_3=-3\\2x_1+3x_2+x_3=-1\\x_1-x_2-x_3=3\end{array}\right\}.$$

Решение. Составляем и вычисляем определитель системы:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=9;\ D\neq 0.$$

Это значит, что система совместна и определенна, т. е. имеет решение, и притом единственное. Формулы (15, 9) для определения неизвестных дают

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-3&2&-1\\-1&3&1\\3&-1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}};\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&-3&-1\\2&-1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}};\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&3&-1\\1&-1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}}.$$

Определитель, стоящий в знаменателях этих дробей, нами уже вычислен. Он равен 9. $D_x=18$; $D_y=-18$; $D_z=9$.

$$x_1=\frac{D_x}{D}=\frac{18}{9}=2;$$

$$x_2=\frac{D_y}{D}=\frac{-18}{9}=-2;$$

$$x_3=\frac{D_z}{D}=\frac{9}{9}=1.$$

Задача 15, 13. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r}3x+y+z=-2\\5x-y-z=10\\x-y+5z=-12\end{array}\right\}.$$

Решение. Вычислим прежде всего определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=-48.$$

Поскольку этот определитель не равен нулю, система имеет решение, и притом единственное.

Приступаем к определению неизвестных по формулам (15, 9):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}.$$

Определитель, стоящий в знаменателях этих дробей, нами уже вычислен. Он равен -48. Вычисляем определители, стоящие в числителях этих дробей:

$$D_x=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-48;\quad D_x=-48;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=96;\qquad D_y=96;$$

$$D_z=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=144;\qquad D_z=144$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-48}{-48}=1;\ x=1;$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{96}{-48}=-2;\ y=-2;$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{144}{-48}=-3;\ z=-3.$$

Задача 15, 14 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_2-x_3&=0\\ x_1-x_2-3x_3&=13\\ 3x_1-2x_2+4x_3&=-15\end{aligned}\right\}$$

Ответ. $x_1=-1;\ x_2=-2;\ x_3=-4.$

Задача 15, 15 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned}x_1+3x_2-3x_3&=13\\ 2x_1-3x_2+3x_3&=-10\\ x_1\qquad\ +x_3&=0\end{aligned}\right\};\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3&=-4\\ 3x_1+x_2-x_3&=-1\\ 4x_1-2x_2+3x_3&=-7\end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 + \phantom{2x_2 -{}} x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$; 2) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; 3) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

Задача 15, 16. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 5 \\ 2x - 3y + 6z &= 11 \\ 8x - 3y + 10z &= 21 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Вычисляем прежде всего определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 8 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, определитель системы равен нулю.

Минор этого определителя, стоящий в левом верхнем углу,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Это обстоятельство указывает на то, что третья строка определителя является линейной комбинацией двух первых. И действительно, если элементы первой строки умножить на 2, а второй — на 3 и сложить, то получатся элементы третьей строки (проверьте!).

Вычислим теперь определители D_x, D_y и D_z, и если окажется, что хотя бы один из них не равен нулю, то из этого будет следовать, что система не имеет решений, т. е. она несовместна, или противоречива.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 11 & -3 & 6 \\ 21 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -132.$$

Таким образом, по пункту 2 (стр. 129) правил исследования системы уравнений получается, что система несовместна. Если умножить левую часть первого уравнения на 2, а второго — на 3 и полученные произведения сложить, то получим левую часть третьего уравнения

$$2(x + 3y - 4z) + 3(2x - 3y + 6z) = 8x - 3y + 10z.$$

Отсюда заключаем, что она является линейной комбинацией левых частей первого и второго уравнений. Но если правую часть первого уравнения умножить на 2, а второго — на 3, то получится $2 \cdot 5 + 3 \cdot 11 = 43$, тогда как правая часть третьего уравнения не 43, а 21. Отсюда и произошла противоречивость системы.

Итак, предложенная система уравнений решений не имеет.

Задача 15, 17 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x+y-3z=7 \\ 3x-y+2z=4 \\ 7x-y+z=17 \end{array}\right\}.$$

Ответ. Система несовместна (см. п. 2, стр. 129) и решений не имеет.

Задача 15, 18. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 7x_1+7x_2+3x_3=2 \end{array}\right\}.$$

Решение. Прежде всего вычисляем определитель системы и находим, что $D=0$.

Один из миноров определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0.$$

Это указывает на то, что один из рядов определителя D является линейной комбинацией двух других рядов (проверьте, что если сложить утроенные элементы первой строки с соответствующими удвоенными элементами второй строки, то получатся соответствующие элементы третьей строки).

Теперь вычислим D_x, D_y и D_z и получим, что $D_x=D_y=D_z=0$.

Итак, не только $D=0$, но и $D_x=0$; $D_y=0$ и $D_z=0$. Из того, что все эти определители равны нулю, а минор $\Delta\neq 0$, на основании пункта 3 (стр. 129) следует, что одно из уравнений системы является следствием двух других, и система неопределенна. Действительно, третье уравнение мы получим, если первое умножим на 3, второе — на 2 и почленно сложим.

Отсюда уже заключаем, что третье уравнение удовлетворяется решениями первых двух

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=1 \end{array}\right\},$$

и система приводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Из того, что

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

следует, что эта система может быть разрешена относительно x_1 и x_2.

Перепишем уравнения последней системы в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2=x_3 \\ 2x_1-x_2=1-3x_3 \end{array}\right\}.$$

Теперь по хорошо известным формулам получаем

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ 1-3x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}; \quad x_1 = \frac{3-8x_3}{7};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & 1-3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{5x_3-1}{7}.$$

Давая неизвестному x_3 произвольные значения, будем получать соответствующие значения для x_1 и x_2. Предложенная система уравнений имеет решения, и этих решений бесконечное множество.

Задача 15, 19. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Система неопределенна: $x_1 = \frac{5-x_3}{5}$; $x_2 = \frac{4}{5}x_3$.

Задача 15, 20. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 3 \\ 7y - 7z &= 1 \\ 2x - y - z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Система неопределенна: $x = \frac{18+7z}{7}$; $y = \frac{1+7z}{7}$.

Давая неизвестному z произвольные значения, будем получать соответствующие значения x и y. Предложенная система уравнений имеет решения, и этих решений бесконечное множество.

Задача 15, 21. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - 4y + 2z &= 5 \\ 3x - 6y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Вычисляем определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

К этому заключению мы приходим немедленно, замечая, что элементы первого столбца равны соответствующим элементам третьего столбца.

Исследуем миноры определителя D:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого следует, что коэффициенты при соответствующих неизвестных первого и второго уравнений пропорциональны. Оказывается, что и

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это показывает, что соответствующие коэффициенты при неизвестных в первом и третьем уравнениях также пропорциональны.

Определитель

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор же этого определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, определитель системы D и все его миноры равны нулю, один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен; оказалось, что и один из миноров определителя D_x не равен нулю. На основании пункта 4 (стр. 129) заключаем, что система несовместна (противоречива) и, значит, решений не имеет.

Всего этого исследования можно было бы и не производить, если заметить, что коэффициенты при неизвестных во втором уравнении получаются из коэффициентов при неизвестных в первом уравнении умножением на 2, а свободный член второго уравнения не получается из свободного члена первого уравнения умножением его на 2. Отсюда сразу можно было сделать заключение о противоречивости системы.

Задача 15. 22. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5 \\ 2x - 8y + 6z &= 10 \\ 3x - 12y + 9z &= 15 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 3 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку имеет место пропорциональность соответствующих элементов, например, первого и второго столбцов (свойство 2).

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 10 & -8 & 6 \\ 15 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как легко усмотреть пропорциональность соответствующих элементов, например, первой и второй строки (свойство 2).

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 15 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как сразу усматриваем, что элементы первого столбца пропорциональны соответствующим элементам второго и третьего столбцов (свойство 2).

На том же основании сразу заключаем, что

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 10 \\ 3 & -12 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Легко проверить, что все миноры определителей D, D_x, D_y, D_z также равны нулю. И так как один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен, то система неопределенна, имеет решения, и решений будет бесконечное множество (см. пункт 5 на стр. 129).

Мы легко усматриваем, что второе и третье уравнения системы получаются из первого умножением соответственно на 2 и на 3, т. е. второе и третье уравнения являются следствиями первого, а потому решения первого уравнения удовлетворяют второму и третьему.

Значит, система трех уравнений в нашем случае приводится к одному первому уравнению

$$x - 4y + 3z = 5,$$

откуда

$$x = 5 + 4y - 3z.$$

Давая y и z произвольные значения, получим соответствующие значения x. Система имеет бесконечное множество решений.

Задача 15, 23 (для самостоятельного решения).

Решить системы уравнений:

1) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$; 2) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 7x_1 - 3x_2 - x_3 &= 17 \\ 16x_1 - 11x_2 + 2x_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$;

3) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 22 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$; 4) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 11 \\ 3x + 2y - 4z &= 15 \\ 4x + 3y - 7z &= 19 \end{aligned}\right\}$;

5) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 4 \\ 4x + 6y - 10z &= 8 \\ 8x + 12y - 20z &= 16 \end{aligned}\right\}$.

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$.

2) Система несовместна.

3) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

4) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x = 7 - 2z$; $y = -3 + 5z$.

5) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x = 2 - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z$.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Векториая алгебра.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это занятие посвящается векторной алгебре, имеющей очень большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин. Напомним основные сведения из векторной алгебры.

Различают два рода величин: скалярные и векторные.

Фиг. 16,1.

1. Если некоторая величина вполне определяется ее числовым значением, то ее называют скалярной. Примерами скалярных величин могут служить масса, плотность, работа, сила тока, температура. Скаляры являются алгебраическими величинами и с ними можно производить любые алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и т. д.

2. Если при определении некоторой величины для ее полной характеристики, кроме числового значения, надо знать и ее направление, то такая величина называется векторной, или вектором. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила. Длина вектора называется также его модулем, или абсолютной величиной.

3. Вектор обозначается графически отрезком прямой, на котором ставится стрелка, указывающая направление вектора (фиг. 16, 1). Мы будем вектор обозначать одной буквой с черточкой над ней, например, $\bar{a}$, а модуль этого вектора — той же буквой, только без черточки над ней, т. е. a. Модуль вектора a часто обозначается $|\bar{a}|$.

Вектор мы будем также обозначать $\overline{AB}$, где A — начало и B — конец вектора, а его модуль — теми же буквами, но без черточки наверху.