4) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x = 7 - 2z$; $y = -3 + 5z$.

5) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x = 2 - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z$.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Векториая алгебра.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это занятие посвящается векторной алгебре, имеющей очень большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин. Напомним основные сведения из векторной алгебры.

Различают два рода величин: скалярные и векторные.

Фиг. 16,1.

1. Если некоторая величина вполне определяется ее числовым значением, то ее называют скалярной. Примерами скалярных величин могут служить масса, плотность, работа, сила тока, температура. Скаляры являются алгебраическими величинами и с ними можно производить любые алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и т. д.

2. Если при определении некоторой величины для ее полной характеристики, кроме числового значения, надо знать и ее направление, то такая величина называется векторной, или вектором. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила. Длина вектора называется также его модулем, или абсолютной величиной.

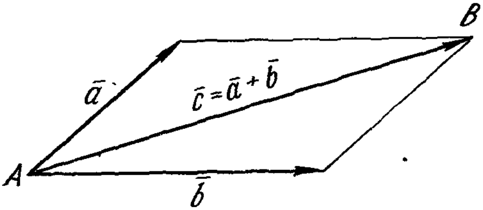
3. Вектор обозначается графически отрезком прямой, на котором ставится стрелка, указывающая направление вектора (фиг. 16, 1). Мы будем вектор обозначать одной буквой с черточкой над ней, например, $\bar{a}$, а модуль этого вектора — той же буквой, только без черточки над ней, т. е. a. Модуль вектора a часто обозначается $|\bar{a}|$.

Вектор мы будем также обозначать $\overline{AB}$, где A — начало и B — конец вектора, а его модуль — теми же буквами, но без черточки наверху.

4. Вектор равен нулю, если его модуль равен нулю. Такой вектор называется нулевым.

5. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если 1) равны их модули, 2) они параллельны и 3) направлены в одну и ту же сторону.

Два вектора с равными модулями, лежащие на параллельных прямых, но противоположно направленные, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается через $-\bar{a}$.



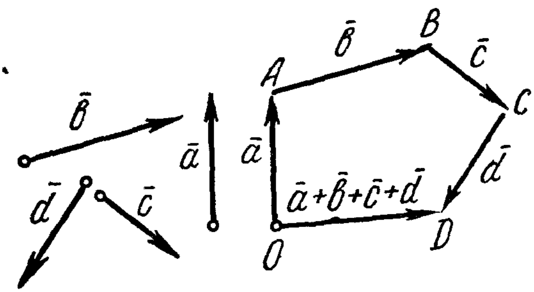
Фиг. 16,2.

6. Сложение векторных величин производится по правилу параллелограмма: сумма двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу, есть третий вектор $\bar{c}$, длина которого равна длине диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а направлен он от точки A к точке B (фиг. 16,2)

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}.$$

Модуль вектора $\bar{c}$ вычисляется по формуле

$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\bar{a},\ \bar{b})}. \qquad (16,1)$$



Фиг. 16, 3.

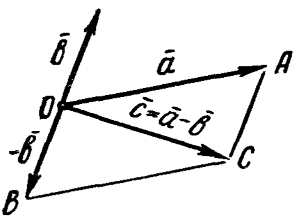
7. Сумму нескольких векторов, например $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, строят так: берут произвольную точку O плоскости и из нее строят вектор $\overline{OA}$, равный вектору $\bar{a}$; из точки A проводят вектор $\overline{AB}$, равный вектору $\bar{в}$, из точки B — вектор $\overline{BC}$, равный вектору $\bar{c}$ и, наконец, из точки C строят вектор $\overline{CD}$, равный вектору $\bar{d}$. Вектор $\overline{OD}$, замыкающий полученную ломаную линию $OABCD$, и будет суммой векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ (фиг. 16, 3):

$$\overline{OD}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}.$$

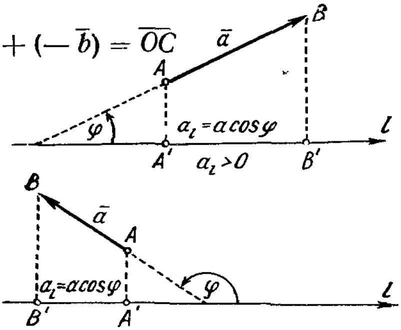
По такому же правилу строится и сумма любого числа векторов.

8. Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который равен сумме векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$ (фиг. 16, 4). Вектор $-\bar{b}$ параллелен вектору $\bar{b}$, равен ему по модулю, но противоположно направлен·

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = \overline{OC}$$



Фиг. 16,4



Фиг. 16,5.

9. При умножении вектора $\bar{a}$ на скаляр k получается вектор $\bar{b}$, модуль которого равен модулю вектора $\bar{a}$, умноженному на k, т. е. $b = ak$. Направления векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают, если $k > 0$, и они противоположны, если $k < 0$. Имеем

$$k \cdot \bar{a} = \bar{b}, \quad \text{или} \quad \bar{a} = \frac{1}{k}\bar{b} \quad (k \neq 0).$$

10. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, независимо от того, направлены они одинаково или противоположно, называются коллинеарными.

11. Единичным вектором, или ортом данного вектора, называется вектор, совпадающий по направлению с данным вектором и имеющий модуль, равный единице.

12. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$ называется длина отрезка $A'B'$, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось. Этой длине приписывается знак плюс, если направление отрезка $A'B'$ совпадает с направлением оси, и знак минус, если его направление противоположно направлению оси.

Проекция вектора на ось есть скалярная величина, равная произведению модуля проектируемого вектора на косинус угла между положительными направлениями оси и вектора (фиг. 16, 5). Проекция вектора a на ось $\bar{l}$ обозначается через a_l или $\text{пр}_l\bar{a}$, а угол между осью $\bar{l}$ и вектором $\bar{a}$ будем обозначать так: $(\bar{l}, \widehat{\ }\bar{a})$. Таким образом,

$$a_l = \text{пр}_l\bar{a} = a\cos\varphi. \qquad (16, 2)$$

Если α, β и γ — углы, образованные вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат, то проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси будут равны

$$\left.\begin{array}{l} a_x = a\cos\alpha \\ a_y = a\cos\beta \\ a_z = a\cos\gamma \end{array}\right\}. \qquad (16,3)$$

В дальнейшем предполагается, что система координат — прямоугольная.

Модуль вектора через его проекции на оси прямоугольной системы координат вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (16,4)$$

т. е. модуль вектора равен арифметическому значению квадратного корня из суммы квадратов его проекций.

Вектор равен нулю, если все три его проекции равны нулю (этим положением пользуются, например, в механике при выводе необходимых и достаточных условий равновесия тела под действием системы сил, проходящих через одну точку).

Если векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ равны, то равны и их проекции.

$$a_{1x} = a_{2x};\ a_{1y} = a_{2y};\ a_{1z} = a_{2z}. \qquad (16,5)$$

Если для вектора $\bar{a}$ известны координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и координаты его конца $B(x_2, y_2, z_2)$, то проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси определяются по формулам

$$a_x = x_2 - x_1;\ a_y = y_2 - y_1;\ a_z = z_2 - z_1, \qquad (16,6)$$

а модуль вектора в этом случае определится по формуле

$$a = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \qquad (16,7)$$

Очевидно, что по формуле (16,7) следует вычислять и расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

13. Проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Из векторного равенства

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_n \qquad (16,8)$$

следуют такие три скалярные равенства·

$$\begin{array}{l} a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + \ldots + a_{nx}; \\ a_y = a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} + \ldots + a_{ny}; \\ a_z = a_{1z} + a_{2z} + a_{3z} + \ldots + a_{nz}. \end{array} \qquad (16,9)$$

14. Если $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — векторы, по модулю равные единице и направленные по координатным осям Ox, Oy и Oz, то разло-

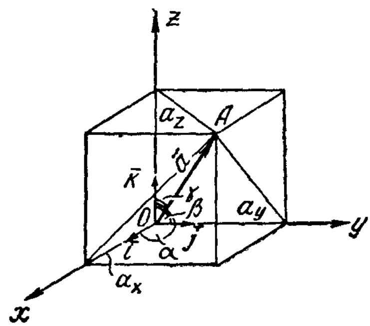
жение вектора $\bar{a}$ по трем координатным осям выражается формулой

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \tag{16, 10}$$

где a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz.

Величины a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси — называются координатами вектора*. Если вектор $\bar{a}$ имеет начало в начале координат, а его конец A имеет координаты x, y и z, то тогда его проекции на координатные оси равны координатам его конца:

$$a_x = x; \quad a_y = y; \quad a_z = z.$$



Фиг. 16,6.

В этом случае вектор $\bar{a}$ называется радиусом-вектором точки A. Радиус-вектор точки обозначается обыкновенно через $\bar{r}$ (фиг. 16, 6)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{16, 11}$$

а модуль радиуса-вектора точки A (x, y, z) вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{16, 12}$$

15. Углы, образуемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz, определяются из формул (16, 3) и (16, 4):

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\\
\cos\beta &= \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\\
\cos\gamma &= \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.
\end{aligned} \tag{16, 13}$$

Косинусы, определяемые по этим формулам, называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Для направляющих косинусов вектора имеет место формула

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{16, 14}$$

т. е. сумма квадратов косинусов углов, образуемых вектором с тремя взаимно-перпендикулярными осями, равна единице.

---

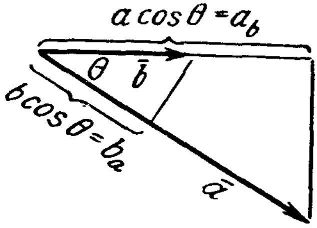
* Если вектор $\bar{a}$ имеет координаты a_x, a_y, a_z, то это обозначается так: $\bar{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}$.

Если $|\bar{a}| = 1$, т. е. если $\bar{a}$ — единичный вектор, обозначаемый обыкновенно через $\bar{a}^0$, то его проекции на координатные оси вычисляются по формулам

$$a_x^0 = 1 \cdot \cos\alpha; \quad a_y^0 = 1 \cdot \cos\beta; \quad a_z^0 = 1 \cdot \cos\gamma, \qquad (16, 15)$$

т. е. проекции единичного вектора $\bar{a}^0$ на оси прямоугольной системы координат Ox, Oy и Oz равны соответственно направляющим косинусам этого вектора. Имеет место формула

$$\bar{a}^0 = \bar{i} \cdot \cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k} \cdot \cos\gamma. \qquad (16, 16)$$



Фиг. 16,7

16. Если даны два вектора

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k},$$

$$\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k},$$

то
$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$$

и

$$(\bar{a} \pm \bar{b})_x = a_x \pm b_x; \quad (\bar{a} \pm \bar{b})_y = a_y \pm b_y; \quad (\bar{a} \pm \bar{b})_z = a_z \pm b_z. \qquad (16, 17)$$

17. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Если обозначить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через θ, для скалярного произведения будем иметь

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta. \qquad (16, 18)$$

Из формулы (16, 18) следует, что скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — это произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первого вектора (фиг. 16, 7):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b_a = b \cdot a_b, \qquad (16, 19)$$

откуда $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a}$; $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{b}$. Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, так как в этом случае $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Скалярное произведение имеет свойства, аналогичные свойствам произведений чисел:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

(переместительное свойство умножения);

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

(распределительное, или дистрибутивное свойство произведения).

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы проекциями на координатные оси

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$
$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \qquad (16,20)$$

а косинус угла θ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}, \qquad (16,21)$$

Если углы, образуемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями, обозначить через α, β и γ, а углы, образуемые вектором $\bar{b}$ с координатными осями, — через α_1, β_1 и γ_1, то косинус угла θ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по формуле

$$\cos\theta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1. \qquad (16,22)$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, и тогда

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \qquad (16,23)$$

или

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = 0. \qquad (16,24)$$

18. *Векторным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который определяется следующими условиями:

1) Его модуль равен $ab \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, определяемой перемножаемыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3) Вектор $\bar{c}$ направлен так, что наблюдателю, смотрящему с его конца на перемножаемые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, кажется, что для кратчайшего совмещения первого сомножителя со вторым первый сомножитель нужно вращать против часовой стрелки (фиг. 16, 8). Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a} \times \bar{b}$:

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = a \cdot b \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}), \qquad (16,25)$$

или

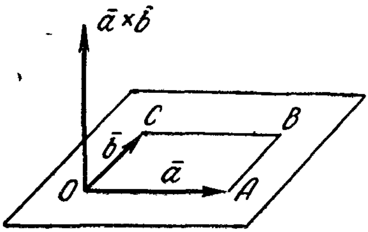
$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \text{пл. } OABC. \qquad (16,26)$$

Основные свойства векторного произведения:

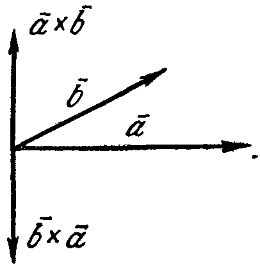
1) Векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ равно нулю, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны или какой-либо из перемножаемых векторов является нулевым.

2) При перестановке местами векторов сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный (фиг. 16, 9):

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$



Фиг. 16,8



Фиг. 16,9.

Векторное произведение не обладает свойством переместительности.

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ (распределительное свойство).

Выражение векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ через проекции векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на координатные оси прямоугольной системы координат дается формулой

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k}, \quad (16, 27)$$

которую можно записать с помощью определителя

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (16, 28)$$

Проекции векторного произведения на оси прямоугольной системы координат вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ (\bar{a} \times \bar{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ (\bar{a} \times \bar{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}\right\}, \quad (16, 29)$$

и тогда на основании (16, 4)

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}. \quad (16, 30)$$

Механический смысл векторного произведения состоит в следующем: если вектор $\bar{F}$ — сила, а вектор $\bar{r}$ есть радиус-вектор точки приложения силы, имеющий свое начало в точке O, то момент силы $\bar{F}$ относительно точки O $m_0(\bar{F})$ есть вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\bar{r}$ точки приложения силы на силу $\bar{F}$, т. е.

$$m_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

19. Векторно-скалярное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ или смешанное их произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (16,31)$$

Абсолютная величина векторно-скалярного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, получим по формуле

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \qquad (16,32)$$

причем знак перед определителем должен быть выбран так, чтобы объем V был положительным*.

20. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Задача 16, 1. Найти равнодействующую двух сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, модули которых равны $F_1 = 5$, $F_2 = 7$, угол между ними $\theta = 60°$. Определить также углы α и β, образуемые равнодействующей с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ (фиг. 16, 10).

Решение. По формуле (16, 1) находим

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60°},$$

или

$$R = \sqrt{25 + 49 + 35} \approx 10{,}44.$$

Углы α и β находим из треугольника ABC, пользуясь теоремой синусов ($\theta = \alpha + \beta$):

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180° - \theta)}.$$

* Предполагается, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не лежат в одной плоскости.

Но

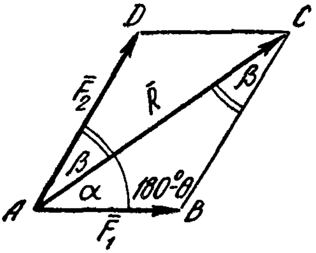
$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta,$$

и тогда

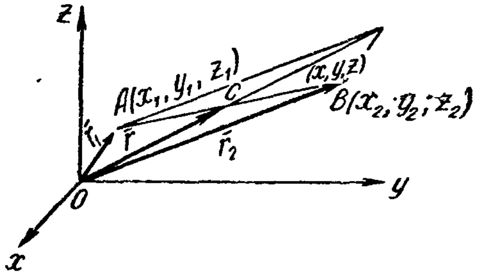
$$\sin\alpha = \frac{F_2 \cdot \sin\theta}{R} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10{,}44} = 0{,}581; \quad \alpha = 35°30';$$

$$\sin\beta = \frac{F_1 \cdot \sin\alpha}{F_2} = \frac{5 \cdot 0{,}581}{7} = 0{,}415; \quad \beta = 24°30'.$$

Контроль: $(\alpha + \beta = 60°)$.



Фиг. 16,10.



Фиг. 16,11.

Задача 16, 2. (для самостоятельного решения). Найти равнодействующую $\bar{R}$ сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, а также углы α и β, составляемые равнодействующей с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, если $|\bar{F}_1| = 15$; $|\bar{F}_2| = 10$; угол между силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ $\theta = 45°$.

Ответ. $R = 23{,}173$; $\alpha = 17°46'$; $\beta = 27°14'$.

Задача 16, 3. Определить координаты точки C — средины вектора $\bar{a}$ по известным радиусам-векторам его концов A и B (фиг. 16, 11).

Решение. Пусть радиусы-векторы точек A и B соответственно равны $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Средина отрезка AB будет находиться на пересечении диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, и тогда точка C определится радиусом-вектором $\bar{r}$, который равен полусумме векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, т. е.

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}. \tag{16, 33}$$

Координаты точки A обозначим через x_1, y_1 и z_1 координаты точки B — через x_2, y_2 и z_2, а координаты точки C — через x, y и z.

Спроектируем векторное равенство (16, 33) на оси координат по формулам (16, 9). Так как векторы $\bar{r}$, $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ являются радиусами-векторами точек A и B, то их проекции на координатные оси будут равны

$$r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z;\ r_{1x} = x_1;\ r_{1y} = y_1;\ r_{1z} = z_1;$$

$$r_{2x} = x_2;\quad r_{2y} = y_2;\quad r_{2z} = z_2.$$

Тогда векторное равенство (16, 33) заменится такими тремя скалярными равенствами, определяющими координаты средины отрезка по известным координатам его концов,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{16, 34}$$

Задача 16, 4 (для самостоятельного решения). Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов $A(2,4-3)$ и $B(-4,4-5)$. Найти координаты средины отрезка AB.

Ответ. $x = -1$; $y = 4$; $z = -4$.

Задача 16, 5 (для самостоятельного решения). Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ расположены в одной и той же плоскости. Даны их длины: $|\bar{a}| = 3$; $|\bar{b}| = 2$; $|\bar{c}| = 2$. Известно, что векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют с вектором $\bar{a}$ углы в 60°. Определить угол α между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и длину суммы $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

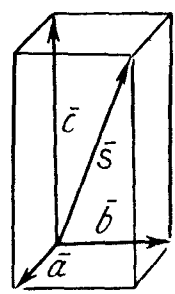
Ответ. $\alpha = 0$ или $\alpha = 120^\circ$. В первом случае $|\bar{s}| = \sqrt{37}$, во втором $|\bar{s}| = 5$.

Задача 16, 6 (для самостоятельного решения). Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно взаимно-перпендикулярны, а длина их соответственно равна 2, 3 и 6. Найти длину суммы $\bar{s}$ этих векторов и направляющие косинусы вектора $\bar{s}$ (фиг. 16, 12).

Ответ. $|\bar{s}| = 7$; $\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{a}}) = \frac{2}{7}$;

$$\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{b}}) = \frac{3}{7};$$

$$\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{c}}) = \frac{6}{7}.$$



Фиг. 16, 12.

Задача 16, 7. Даны два вектора:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k} \text{ и } \bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Найти проекции на координатные оси суммы и разности этих векторов.

Решение. Составим сумму и разность этих векторов:

$$\bar{a}+\bar{b}=(2-3)\bar{i}+(3+2)\bar{j}+(-4+5)\bar{k}.$$

$$\bar{a}-\bar{b}=(2+3)\bar{i}+(3-2)\bar{j}+(-4-5)\bar{k}.$$

Ответ. $\bar{a}+\bar{b}=-\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{a}-\bar{b}=5\bar{i}+\bar{j}-9\bar{k}$;

$$(\bar{a}+\bar{b})_x=-1;\quad (\bar{a}+\bar{b})_y=5;\quad (\bar{a}+\bar{b})_z=1;$$

$$(\bar{a}-\bar{b})_x=5;\quad (\bar{a}-\bar{b})_y=1;\quad (\bar{a}-\bar{b})_z=-9.$$

При решении задачи можно было сразу воспользоваться формулами (16, 17).

Задача 16, 8 (для самостоятельного решения). Найти сумму и разность векторов

$$\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k} \text{ и } \bar{b}=3\bar{i}-4\bar{j}+6\bar{k},$$

а также проекции $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ на координатные оси.

Ответ. $\bar{a}+\bar{b}=5\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$;

$$\bar{a}-\bar{b}=-\bar{i}+7\bar{j}-10\bar{k};$$

$$(\bar{a}+\bar{b})_x=5;\quad (\bar{a}+\bar{b})_y=-1;\quad (\bar{a}+\bar{b})_z=2;$$

$$(\bar{a}-\bar{b})_x=-1;\quad (\bar{a}-\bar{b})_y=7;\quad (\bar{a}-\bar{b})_z=-10.$$

Задача 16, 9. Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов A и B: $A(2, 1 -4)$; $B(1, 3, 2)$.

Найти проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и его направляющие косинусы.

Решение. Проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси находим по формулам (16, 6). $a_x=-1$; $a_y=2$; $a_z=6$;

$$a=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}.$$

Направляющие косинусы определяем по формулам (16, 13):

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{41}};\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{41}};\quad \cos\gamma=\frac{6}{\sqrt{41}}.$$

Задача 16. 10 (для самостоятельного решения). Проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси равны: $a_x=2$; $a_y=3$; $a_z=-4$. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}$.

Ответ. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$; $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{29}}$; $\cos\gamma=-\frac{4}{\sqrt{29}}$.

Задача 16, 11. Найти проекцию вектора

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$$

на ось L, которая составляет с координатными осями углы λ, μ и ν.

Решение. Обозначим через φ угол между положительными направлениями вектора $\bar{a}$ и оси проекций L, а через α, β и γ — углы, составляемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz. Тогда по формуле (16, 22), учитывая, что по условию ось L составляет с теми же координатными осями углы λ, μ и ν, можно написать, что

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu. \qquad (16, 35)$$

По формуле (16, 2) проекция

$$a_L = a\cos\varphi.$$

Подставляя сюда значение $\cos\varphi$ из (16, 35), получим

$$a_L = a(\cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu).$$

Раскрывая в правой части этого равенства скобки и замечая, что

$$a\cos\alpha = a_x;\quad a\cos\beta = a_y;\quad a\cos\gamma = a_z.$$

получим окончательно для проекции a_L вектора на ось выражение

$$a_L = a_x\cos\lambda + a_y\cos\mu + a_z\cos\nu. \qquad (16, 36)$$

Задача 16, 12. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$. Найти его проекцию a_L на ось L, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. По условию направляющие косинусы оси проекций между собою равны:

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu.$$

Но сумма квадратов направляющих косинусов какого-либо направления равна 1, а потому

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

и так как в этой сумме все слагаемые между собой равны, то

$$3\cos^2\lambda = 1;\quad \cos^2\lambda = \frac{1}{3};\quad \cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

тогда

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$$

(знак плюс перед корнем взят потому, что по условию углы λ, μ и ν — острые, а значит, косинусы их положительны). Так как по условию $a_x = 2$; $a_y = 5$, $a_z = 1$, то по формуле (16, 36) получаем

$$a_L = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}};\quad a_L = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Задача 16, 13. На точку действуют три силы: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$, проекции которых на оси прямоугольной системы координат таковы:

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$
X	2	4	-5
Y	1	-3	4
Z	5	1	2

Найти величину и направление равнодействующей.

Решение. Равнодействующая $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$. Обозначим проекции равнодействующей через X, Y, Z, а проекции сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ — соответственно через X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 и X_3, Y_3, Z_3.

По формулам (16, 9) имеем

$$X = X_1 + X_2 + X_3; \qquad X = 1,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3; \qquad Y = 2,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3; \qquad Z = 8.$$

По формуле (16, 4) величина равнодействующей R будет равна корню квадратному из суммы квадратов проекций $\overline{R}$ на координатные оси:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2}, \quad R = \sqrt{69}.$$

По формулам (16, 13) находим направляющие косинусы равнодействующей

$$\cos(R, \widehat{\ } x) = \frac{1}{\sqrt{69}}; \quad \cos(R, \widehat{\ } y) = \frac{2}{\sqrt{69}}; \quad \cos(R, \widehat{\ } z) = \frac{8}{\sqrt{69}}.$$

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). На точку действуют четыре силы: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, проекции которых на координатные оси прямоугольной системы координат даны в таблице:

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$	$\overline{F}_4$
X	1	-5	4	-1
Y	2	3	4	5
Z	1	-2	-3	4

Найти величину и направление равнодействующей.

Ответ. $R = \sqrt{197}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{197}}$; $\cos\beta = \frac{14}{\sqrt{197}}$; $\cos\gamma = 0$.

Задача 16, 15. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{7, 2, -1\}$ и $\bar{b}\{1, 2, -3\}$. Найти скалярное произведение этих векторов и угол между ними.

Решение. По формуле (16, 20)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

подставляя сюда проекции данных векторов, получим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 14;$$

по формуле (16, 18)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos\theta,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab}.$$

Таким образом, для определения $\cos\theta$ нам осталось определить модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

По (16, 4)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2};$$

отсюда

$$a = \sqrt{54}; \quad a = 7{,}348;$$

$$b = \sqrt{14}; \quad b = 3{,}742;$$

получаем, что

$$\cos\theta = \frac{14}{27{,}496};$$

$$\cos\theta = 0{,}509; \quad \theta = 59°24'.$$

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ заданы координатами своих концов

$$A\{1, -3, -4\}; \quad B\{-1, 0{,}2\}; \quad C\{2, -4, -6\}; \quad D\{1, 1, 1\}.$$

Определить угол между этими векторами.

Ответ. $\cos\theta = 0{,}973; \quad \theta = 13°21'.$

Указание. $(\overline{AB})_x = -2; \quad (\overline{AB})_y = 3; \quad (\overline{AB})_z = 6;$

$$(\overline{CD})_x = -1; \quad (\overline{CD})_y = 5; \quad (\overline{CD})_z = 7;$$

$$AB = 7; \; CD = 8.660$$

Задача 16, 17. Определить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными своими проекциями $\bar{a}\{2, 1, -2\}$, $\bar{b}\{1, -4, 2\}$.

Решение. По формуле (16, 21)

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}.$$

Все величины, стоящие в числителе этой дроби, известны из условия задачи. Неизвестными являются модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad a = \sqrt{9}; \quad a = 3.$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}; \quad b = \sqrt{21}; \quad b = 4{,}582.$$

Подставляя в (16, 21), числа получим $\cos\theta = \frac{-6}{13{,}746}$;

$$\cos\theta = -0{,}436; \quad \theta = 115°51'.$$

Задача 16, 18 (для самостоятельного решения). Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{2, 4, -3\}$ и $\bar{b}\{6, -4, 2\}$.

Определить: 1) их скалярное произведение; 2) угол между ними; 3) проекцию вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$.

Ответ. 1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = -10$; 2) $\cos\theta = -0{,}248$; $\theta = 104°21$. 3) $a_b = -1{,}336$.

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения) Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{4, -1, -2\}$ и $\bar{b}\{2, 1, 2\}$; Определить: 1) скалярное произведение этих векторов; 2) угол между ними; 3) проекцию a_b вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$; 4) проекцию b_a вектора $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$.

Ответ. 1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3$; 2) $\theta = 77°24'$; $a_b = 1$; $b_a = 0{,}655$.

Задача 16, 20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k},$$

$$\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}.$$

Решение. По определению векторного произведения двух векторов модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Поэтому для решения задачи найдем сначала векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$, а потом его модуль. Согласно (16, 28) имеем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i} + 17\bar{j} + 9\bar{k},$$

а модуль

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371};$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = 19{,}26.$$

Искомая площадь параллелограмма

$$S = 19{,}26 \text{ кв. ед.}$$

Замечание. Векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ можно было сразу определить по формуле (16, 27), в которой следует взять

$$a_x = 5; \quad a_y = -4; \quad a_z = 7;$$
$$b_x = 1; \quad b_y = 1; \quad b_z = -2.$$

Задача 16, 21 (для самостоятельного решения). Найти векторное произведение векторов

$$\bar{a} = 7\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$
$$\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

и его модуль.

Ответ. $\bar{a} \times \bar{b} = 2\bar{i} - 34\bar{j} - 18\bar{k}; \quad |\bar{a} \times \bar{b}| = 38{,}52.$

Задача 16, 22 (для самостоятельного решения). Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{-1, 2, 4\}$ и $\bar{b}\{2, -1, -4\}$. Определить их векторное произведение и его модуль.

Ответ. $\bar{a} \times \bar{b} = -4\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}; |\bar{a} \times \bar{b}| = 6{,}4.$

Задача 16, 23. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ определены координатами своих концов: $A(2, 4, 5)$; $B(-1, -3, -2)$; $C(4, 1, 7)$; $D(-2, 3, 10)$. Найти: 1) векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{CD}$; 2) его модуль; 3) направляющие косинусы векторного произведения.

Решение. 1) Найдем прежде всего проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на координатные оси по формулам (16, 6):

$$(\overline{AB})_x = -3; \quad (\overline{CD})_x = -6;$$
$$(\overline{AB})_y = -7; \quad (\overline{CD})_y = 2;$$
$$(\overline{AB})_z = -7; \quad (\overline{CD})_z = 3.$$

Итак, $\overline{AB}\{-3, -7, -7\}$; $\quad \overline{CD}\{-6, 2, 3\}$.

Тогда по формуле (16, 27)

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = [-7 \cdot 3 - (-7) \cdot 2]\,\bar{i} + [-7 \cdot (-6) - (-3) \cdot 3]\,\bar{j} + $$
$$+ [-3 \cdot 2 - (-7) \cdot (-6)]\,\bar{k}.$$
$$\overline{AB} \times \overline{CD} = -7\bar{i} + 51\bar{j} - 48\bar{k}.$$

2) Модуль векторного произведения по его известным проекциям найдем по формуле (16, 4):

$$|\overline{AB} \times \overline{CD}| = \sqrt{(-7)^2 + 51^2 + (-48)^2};$$
$$|\overline{AB} \times \overline{CD}| = \sqrt{4954} = 70{,}3847.$$

3) Направляющие косинусы векторного произведения найдем по формулам (16, 13):

$$\cos\alpha = \frac{-7}{70{,}3847}; \quad \cos\beta = \frac{51}{70{,}3847}; \quad \cos\gamma = \frac{-48}{70{,}3847};$$

$$\cos\alpha = -0{,}099; \quad \cos\beta = 0{,}724; \quad \cos\gamma = -0{,}682.$$

Задача 16, 24. Найти площадь треугольника, координаты вершин которого известны:

$$A(-2, 1, 2); \quad B(3, -3, 4); \quad C(1, 0, 9).$$

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Площадь треугольника ABC есть половина площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, есть, модуль векторного произведения $\overline{AB} \times \overline{AC}$, а потому площадь треугольника ABC есть

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|\cdot$$

Найдем векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{AC}$, а потому половину его модуля.

Проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ на координатные оси найдем по формулам (16, 6),

$$(\overline{AB})_x = 5; \quad (\overline{AC})_x = 3;$$

$$(\overline{AB})_y = -4; \quad (\overline{AC})_y = -1;$$

$$(\overline{AB})_z = 2; \quad (\overline{AC})_z = 7.$$

$$AB = \sqrt{45}; \quad AB = 6{,}708;$$

$$AC = \sqrt{59}; \quad AC = 7{,}681.$$

По формуле (16, 27) для векторного произведения векторов найдем, что

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = -26\bar{i} - 29\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Модуль вектора $\overline{AB} \times \overline{AC}$ найдем по формуле (16, 4):

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{1566}; \quad |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 39{,}573;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\cdot 39{,}573;$$

$$S_{ABC} = 19{,}787 \text{ кв. ед.}$$

Задача 16, 25. Дана сила $\bar{F}\{3, 4, -2\}$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. Момент силы относительно начала координат равен векторному произведению радиуса-вектора точки A приложения силы на силу $\bar{F}$, т. е. $m_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$.

Проекции радиуса-вектора точки A на координатные оси равны координатам точки A — формула (16, 11):

$$r_x = x = 2;\ r_y = y = -1;\ r_z = z = 3;$$
$$\bar{r} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}.$$

Проекции X, Y, Z силы $\bar{F}$ на координатные оси нам также известны из условия задачи:

$$X = 3;\ Y = 4;\ Z = -2,$$

и тогда формула (16, 27) даёт

$$m_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = [-1\cdot(-2) - 3\cdot 4]\,\bar{i} + [3\cdot 3 - 2\cdot(-2)]\cdot\bar{j} + $$
$$+ [2\cdot 4 - (-1)\cdot 3]\,\bar{k};$$
$$m_0(\bar{F}) = -10\bar{i} + 13\bar{j} + 11\bar{k}.$$

Отсюда

$$m_x = -10;\ m_y = 13;\ m_z = 11;$$

и модуль момента

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{(-10)^2 + 13^2 + 11^2};\ m = \sqrt{390};$$
$$m = 19{,}748.$$

Направляющие косинусы вектора $m_0(\bar{F})$ равны

$$\cos\alpha = \frac{-10}{19{,}748} = -0{,}506;\quad \cos\beta = \frac{13}{19{,}748} = 0{,}658;$$
$$\cos\gamma = \frac{11}{19{,}748} = 0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие:

$$\alpha = 120°24';\ \beta = 48°51';\ \gamma = 56°9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. У нас $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}999$.

Задача 16, 26 (для самостоятельного решения). Найти момент силы $\bar{F}\{5, 6, -7\}$ относительно начала координат, если точка ее приложения $A(1, 1, 1)$. Определить также направляющие косинусы момента.

Ответ.

$$m_0(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix};\ m_x = -13;\ m_y = 12;\ m_z = 1;$$

$$m = \sqrt{314};\ \cos\alpha = -\frac{13}{\sqrt{314}};\quad \cos\beta = \frac{17}{\sqrt{314}};\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{314}}.$$

Задача 16, 27. Найти объем пирамиды, если координаты ее вершин

$$A_1(x_1, y_1, z_1);\quad A_2(x_2, y_2, z_2);\quad A_3(x_3, y_3, z_3);$$
$$A_4(x_4, y_4, z_4).$$

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$, на которых построена пирамида.

Зная координаты начала и конца каждого вектора, найдем проекции этих векторов на оси прямоугольной системы координат:

$$\overline{A_1A_2}\,\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\};\ \overline{A_1A_3}\,\{x_3-x_1,\ y_3-y_1, z_3-z_1\};$$
$$\overline{A_1A_4}\,\{x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1\};$$

для объема пирамиды получаем на основании формулы (16, 32)

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Задача 16, 28. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(5, 1, -4)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 3, -4)$ и $A_4(2, 2, 2)$. Определить ее объем.

Решение. Рассмотрим три вектора: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$. Поступая так же, как и при решении задачи 16, 27, по формуле (16, 32) найдем объем пирамиды, построенной на этих векторах. Для применения формулы (16, 32) нам надо знать проекции векторов на оси прямоугольной системы координат. Записывая проекции вектора рядом с его названием, получаем $\overline{A_1A_2}\{-4, 1, 3\}$; $\overline{A_1A_3}\{-2. 2, 0\}$; $\overline{A_1A_4}\{-3, 1, 6\}$; и тогда

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\cdot(-24).$$

$$V=4 \text{ куб. ед}$$

В правой части выбран знак минус, так как определитель отрицателен.

Задача 16, 29 (для самостоятельного решения). Найти объем пирамиды по известным координатам ее вершин:

$$A_1(2, 1, -2);\ A_2(3, 3, 3);\ A_3(1, 1, 2);\ A_4(-1, -2, -3).$$

Ответ. $\frac{1}{6}$ куб. ед.