СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Основные задачи на плоскость.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается основным задачам, связанным с плоскостью. Напомним основные формулы.

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{17, 1}$$

Если в этом уравнении $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, и ее уравнение будет таким

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{17, 2}$$

При $C = 0$ уравнение (17, 1) примет вид

$$Ax + By + D = 0, \tag{17, 3}$$

и плоскость параллельна оси Oz. При $B = 0$ уравнение (17, 1) запишется в виде

$$Ax + Cz + D = 0. \tag{17, 4}$$

В этом случае плоскость параллельна оси Oy, а при $A = 0$ уравнение (17, 1) приобретает вид

$$By + Cz + D = 0, \tag{17, 5}$$

и плоскость параллельна оси Ox.

Вообще следует запомнить, что если плоскость параллельна какой-нибудь координатной оси, то в ее уравнении отсутствует член, содержащий координату, одноименную с этой осью. Если в уравнениях (17, 3), (17, 4) и (17, 5) окажется, что $D = 0$, то эти уравнения имеют вид

$$Ax + By = 0; \tag{17, 6}$$

$$Ax + Cz = 0; \tag{17, 7}$$

$$By + Cz = 0. \tag{17, 8}$$

Уравнение (17, 6) — уравнение плоскости, проходящей через координатную ось Oz; (17, 7) — уравнение плоскости, проходящей через ось Oy, а (17, 8) — уравнение плоскости, проходящей через ось Ox. Если в уравнении (17, 1) $A = 0$ и $B = 0$, то оно приобретет вид

$$Cz + D = 0, \tag{17, 9}$$

и плоскость параллельна координатной плоскости xOy. При $B = 0$ и $C = 0$ уравнение (17, 1) запишется в виде

$$Ax + D = 0, \tag{17, 10}$$

а определяемая им плоскость, параллельна координатной плоскости yOz. При $A = 0$ и $C = 0$ получаем из (17, 1)

$$By + D = 0, \tag{17, 11}$$

и плоскость (17, 11) параллельна координатной плоскости xOz.

Если окажется, что в уравнениях (17, 9), (17, 10) и (17, 11) $D = 0$, то эти уравнения примут вид

$$z = 0, \tag{17, 12}$$

$$x = 0, \tag{17, 13}$$

$$y = 0 \tag{17, 14}$$

и будут уравнениями самих координатных плоскостей, соответственно xOy, yOz и xOz.

2. Уравнение плоскости в нормальном виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{17, 15}$$

где α, β и γ — углы между координатными осями Ox, Oy и Oz и перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, а p — длина этого перпендикуляра.

3. Для приведения общего уравнения плоскости (17, 1) к нормальному виду (17, 15) обе его части следует умножить на нормирующий множитель

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{17, 16}$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в уравнении (17, 1).

4. Уравнение плоскости в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{17, 17}$$

где a, b и c — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.

5. Уравнение связки плоскостей, проходящей через точку $M(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{17, 18}$$

Давая коэффициентам A, B и C в уравнении (17, 18) различные значения, мы получим различные плоскости, проходящие через точку $M(x_1, y_1, z_1)$.

6. Угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{17, 19}$$

определяется по формуле

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{17, 20}$$

7. Условие перпендикулярности двух плоскостей (17, 19) имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{17,21}$$

8. Условие параллельности двух плоскостей (17, 19) имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{17,22}$$

9. Расстояние от точки $N(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \tag{17,23}$$

10. Нам часто придется решать систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{17,24}$$

В учебнике Привалова решение этой системы подробно разобрано (см. ч. I, гл. VI).

Мы же для ссылок приведем относящиеся сюда формулы:

$$x = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad y = \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad z = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t, \tag{17,25}$$

где t — произвольное число, а, по крайней мере, один из определителей, входящих в (17, 25), не равен нулю.

11. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17,26}$$

Прежде всего решим ряд задач, связанных с исследованием общего уравнения плоскости.

Задача 17, 1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 4)$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной оси Oz, имеет вид (17, 3)

$$Ax + By + D = 0$$

(так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz, то в ее уравнении отсутствует координата z).

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение (17, 3), получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B + D = 0 \\ -A + 2B + D = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Для определения коэффициентов A, B и D мы имеем систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными. Составляем матрицу коэффициентов этих уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формулам (17, 25) получаем

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t; \; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t; D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t;$$

$$A = t; \; B = -3t; \; D = 7t.$$

Подставляя найденные значения A, B и C в (17, 3), получим

$$tx - 3ty + 7t = 0.$$

После сокращения на t уравнение искомой плоскости приобретет вид

$$x - 3y + 7 = 0.$$

Проверьте правильность решения подстановкой в полученное уравнение сначала координат точки A, а потом координат точки B. Каждый раз в левой части должен получиться нуль.

Задача 17, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -3, 2)$ и $B(7, 1, 0)$ и параллельной оси Ox.

Ответ. $y + 2z - 1 = 0$.

Задача 17, 3 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $A(2, 1, -2)$ и $B(-7, -2, 1)$.

Ответ. $x + 3z + 4 = 0$.

Задача 17, 4. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $A(1, 2, -4)$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy, имеет вид (17, 9): $Cz + D = 0$

Подставляя в него координаты точки A, получим $-4C + D = 0$, или $D = 4C$. Подставляя это значение в (17, 9), получим

$$Cz + 4C = 0,$$

а сокращая на C, будем иметь окончательно

$$z + 4 = 0.$$

Задача 17, 5. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3, 7, -1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то она параллельна плоскости yOz, а потому ее уравнение имеет вид (17, 10)

$$Ax + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки A, получим, что $D = -3A$. Это значение D подставим в (17, 10) и, сокращая на A, будем иметь окончательно $x - 3 = 0$.

Задача 17, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку A (2, —3, 4).

Ответ. $y + 3 = 0$.

Постройте эту плоскость.

Задача 17, 7. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку A (2, 1, 3).

Так как искомая плоскость проходит через ось Ox, то ее уравнение имеет вид $By + Cz = 0$ (17,8). Подставим в это уравнение координаты точки A, через которую плоскость проходит. Получаем $B + 3C = 0$, откуда $B = -3C$.

Это значение B подставляем в (17, 8) и получаем, сокращая на C, $3y - z = 0$.

Задача 17, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку A (—2, 4, —4).

Ответ. $2x + y = 0$.

Задача 17, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A (2, —5, 4) и через ось Oy.

Ответ. $2x - z = 0$.

Задача 17, 10. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

Решение. У точки, лежащей на оси Ox, координаты y и z равны нулю.

Полагая в уравнении плоскости $y = z = 0$, получим для определения величины отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox, уравнение $2x + 30 = 0$, или $x = -15$.

Для определения величины отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Oy, полагаем в уравнении плоскости $x = 0$ и $z = 0$ и получаем $3y + 30 = 0$, или $y = -10$. Наконец, величину отрезка, отсекаемого на оси Oz, найдем, положив в уравнении плоскости $x = 0$ и $y = 0$. Получим $-5z + 30 = 0$ и $z = 6$.

Этим заканчивается решение задачи. Можно было бы поступить и проще, преобразовав данное уравнение к виду в отрезках на осях (17, 17). Для этого перенесем в правую часть равенства свободный член. Данное уравнение запишется в виде $2x + 3y - 5z = -30$. Разделим теперь обе его части на —30 и получим

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Величины отрезков, отсекаемых на координатных осях, равны: $a = -15$; $b = -10$; $c = 6$.

Задача 17, 11 (для самостоятельного решения). Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x-10y+2z-12=0$ на координатных осях.

Ответ. $a=12$; $b=-\frac{6}{5}$ и $c=6$.

Задача 17, 12. Уравнение плоскости $2x+3y-4z+24=0$ преобразовать к виду (17, 17) в отрезках на осях.

Решение. Перенесем свободный член 24 в правую часть уравнения и получим $2x+3y-4z=-24$. Разделим теперь обе части уравнения на -24 и получим

$$\frac{x}{-12}+\frac{y}{-8}+\frac{z}{6}=1.$$

Задача 17, 13 (для самостоятельного решения). Уравнение плоскости $3x-4y+5z-24=0$ преобразовать к виду в отрезках на осях.

Ответ. $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4{,}8}=1.$

Задача 17, 14. Уравнение плоскости $5x+7y-34z+5=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Для приведения общего уравнения плоскости (17, 1) к нормальному виду (17, 15) надо обе его части умножить на нормирующий множитель (17, 16), выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении плоскости. В нашем случае перед корнем следует выбрать знак минус. У нас $A=5$; $B=7$; $C=-34$, и для N получаем

$$N=-\frac{1}{\sqrt{5^2+7^2+(-34)^2}};\quad N=-\frac{1}{\sqrt{1230}},$$

а уравнение принимает вид

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x-\frac{7}{\sqrt{1230}}y+\frac{34}{\sqrt{1230}}z-\frac{5}{\sqrt{1230}}=0.$$

Задача 17, 15 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x+9y-6z+33=0$.

Ответ. $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0.$

Задача 17, 16. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $10x+15y-6z-380=0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

Решение. Приведем уравнение плоскости к нормальному виду. По формуле (17, 16) находим, что нормирующий множитель $N=\frac{1}{19}$. Обе части уравнения данной плоскости умножим на $\frac{1}{19}$ и получим уравнение плоскости в нормальном виде

$$\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-20=0,$$

из которого усматриваем, что $p=20$; косинусы же углов образуемых этим перпендикуляром с координатными осями, будут

$$\cos\alpha=\frac{10}{19};\ \cos\beta=\frac{15}{19};\ \cos\gamma=-\frac{6}{19}.$$

Дроби в правых частях последних равенств превратим в десятичные и получим, что

$$\cos\alpha=0{,}5263;\ \alpha=58^\circ15';$$
$$\cos\beta=0{,}7895;\ \beta=37^\circ52';$$
$$\cos\gamma=-0{,}3158;\ \gamma=108^\circ25'.$$

Контроль: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (значения углов найдены с помощью таблиц тригонометрических функций).

Задача 17,17 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение плоскости

$$3x-4y+5z-14=0.$$

Ответ. $\frac{3}{\sqrt{50}}x-\frac{4}{\sqrt{50}}y+\frac{5}{\sqrt{50}}z-\frac{14}{\sqrt{50}}=0.$

Задача 17, 18 (для самостоятельного решения). На плоскость $5x-y+3z+12=0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти его длину и углы, образованные им с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

Ответ. $p=\frac{12}{\sqrt{35}}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{35}}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{35}}$; $\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{35}}$. Координаты основания перпендикуляра $\left(-\frac{12}{7}, \frac{12}{35}, -\frac{36}{35}\right)$.

Указание. Координаты основания перпендикуляра найдите по формулам

$$x_1=p\cos\alpha;\ y_1=p\cos\beta;\ z_1=p\cos\gamma.$$

Задача 17, 19. Найти расстояние от точки $A(2,\ 3,\ -1)$ до плоскости $7x-6y-6z+42=0$.

Решение. Расстояние от точки до плоскости определяется по формуле (17,23,) в которой следует положить $A=7$; $B=-6$; $C=-6$, $x_1=2$; $y_1=3$; $z_1=-1$. Подставляя эти значения в формулу (17, 23), будем иметь

$$d=\left|\frac{7\cdot 2+(-6)\cdot 3+(-6)\cdot(-1)+42}{\sqrt{7^2+(-6)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{14-18+6+42}{11}\right|=4.$$

Задача 17, 20 (для самостоятельного решения). Найти расстояние от точки $A(2,\ -4,\ 2)$ до плоскости $2x+11y+10z-10=0$.

Ответ. $d=2$.

Задача 17, 21 (для самостоятельного решения). Найти расстояние от точки $A(3,\ +4,\ -1)$ до плоскости $3x+4y-5=0$.

Ответ. $d=4$.

Задача 17, 22. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$5x + 3y - 4z + 15 = 0;$$
$$15x + 9y - 12z - 5 = 0.$$

Решение. Возьмем на какой-нибудь из этих плоскостей произвольную точку. Например, на первой плоскости возьмем точку, для которой $y = 0$; $z = 0$, и определим абсциссу x этой точки. Получим $5x + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 15 = 0$; $x = -3$. Итак, на первой плоскости взята точка (—3,0,0). Определив ее расстояние до второй плоскости по формуле (17, 23), получим

$$d = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

Найденное расстояние d и будет расстоянием между данными плоскостями.

Задача 17, 23 (для самостоятельного решения). Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x - 3y + 6z - 14 = 0$$
$$2x - 3y + 6z + 28 = 0.$$

Ответ. $d = 6$.

Задача 17, 24. Через точку $M(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через данную точку, имеет вид (17, 18). В нашем случае оно будет таким:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Из условия (17, 22) параллельности двух плоскостей получаем

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} (= k).$$

Заменяя в последнем уравнении A, B и C величинами, им пропорциональными, будем иметь

$$2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k(z+1) = 0.$$

или окончательно после упрощений

$$2x - 3y + 5z + 10 = 0.$$

Можно решить задачу и иначе: если плоскости параллельны, то их уравнения можно преобразовать так, что они будут отличаться только свободным членом. Тогда уравнение семейства плоскостей, параллельных данной плоскости, запишется так:

$$2x - 3y + 5z + D = 0. \qquad (A)$$

Подставляя в это уравнение вместо текущих координат x, y и z координаты точки $M(2, 3, -1)$, через которую проходит плоскость, получим уравнение, содержащее одно неизвестное D: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + D = 0$, $D = 10$. Это значение подставляем в (A) и получаем то же, что и раньше·

$$2x - 3y + 5z + 10 = 0.$$

Задача 17, 25 (для самостоятельного решения). Через точку $M(-4, -1, 2)$ провести плоскость, параллельную плоскости

$$3x + 4y - z - 8 = 0.$$

Ответ. $3x + 4y - z + 18 = 0$.

Задача 17, 26 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 5, -1)$ и параллельной плоскости

$$x + 3y - 4z + 5 = 0.$$

Ответ. $x + 3y - 4z - 21 = 0$.

Задача 17, 27 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, -3, 2)$ параллельно плоскости

$$7x - 4y + z - 4 = 0.$$

Ответ. $7x - 4y + z - 21 = 0$.

Задача 17, 28. Через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-2, -1, 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости

$$x + 4y - 2z + 5 = 0.$$

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку, имеет вид (17, 18).

Подставляя в (17, 18) вместо x_1, y_1 и z_1 координаты точки M, получим

$$A(x - 1) + B(y - 2) + C(z - 3) = 0. \qquad (A)$$

Определению подлежат A, B и C.

Так как данная плоскость проходит и через точку $N(-2, -1, 3)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставим в (A) координаты точки N вместо текущих координат и получим

$$A(-2 - 1) + B(-1 - 2) + C(3 - 3) = 0,$$

откуда

$$-3A - 3B = 0, \text{ или } A + B = 0. \qquad (B)$$

Используем теперь то, что искомая плоскость перпендикулярна данной. Условие перпендикулярности двух плоскостей

(17, 21) с учетом того, что из данного уравнения $A_1 = 1$, $B_1 = 4$, $C_1 = -2$, запишется так:

$$1 \cdot A + 4 \cdot B - 2 \cdot C = 0.$$

Соединяя (A) и (B), получим систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A + 4B - 2C = 0 \end{array}\right\}.$$

Решаем эту систему по формулам (17, 25) и получаем

$$A = -2t; \quad B = 2t; \quad C = 3t.$$

Подставляя эти значения A, B и C в (A) и сокращая на t, будем иметь

$$-2(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0.$$

Откроем скобки, сделаем приведение подобных членов и окончательно получим искомое уравнение в виде

$$2x - 2y - 3z + 11 = 0.$$

Задача 17, 29 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1, 2, -3)$ и $N(1, 4, -5)$ и перпендикулярной плоскости $3x + 5y - 6z + 1 = 0$.

Указание. Для определения коэффициентов A, B и C получится система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} A + B - C = 0 \\ 3A + 5B - 6C = 0 \end{array}\right\},$$

из которой на основании формул (17, 25) $A = -t$; $B = 3t$; $C = 2t$.

Ответ. $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

Задача 17, 30. Найти острый угол между двумя плоскостями:

$$5x - 3y + 4z - 4 = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$3x - 4y - 2z + 5 = 0, \qquad \text{(II)}$$

Решение. По формуле (17, 20) получим, если учесть, что на основании (I) $A_1 = 5$; $B_1 = -3$; $C_1 = 4$, а из (II) $A_2 = 3$; $B_2 = -4$; $C_2 = -2$,

$$\cos\varphi = \left|\frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}}\right|; \quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990; \quad \varphi = 60°04'.$$

В формуле (17, 20) следует взять абсолютную величину правой части, так как надо найти острый угол между плоскостями и, значит, $\cos\varphi > 0$.

Задача 17, 31 (для самостоятельного решения). Найти острый угол между плоскостями

$$5x-3y+5z+5=0 \text{ и } x-2y+3z-5=0.$$

Ответ. $\cos\varphi=0{,}9046$; $\varphi=25°14'$.

Задача 17, 32. Выяснить геометрический смысл коэффициентов A, B и C в общем уравнении плоскости (17, 1)

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (A)$$

Решение. 1. Рассмотрим вектор $\bar{n}$ с проекциями на координатные оси, соответственно равными A, B и C, т. е. $\bar{n}\{A, B, C\}$.

2. Возьмем на плоскости (A) две произвольные точки: $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ и рассмотрим вектор $\overline{MN}$. Этот вектор лежит в плоскости (A). Его проекции на координатные оси соответственно равны x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 и $\overline{MN}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

3. Так как точки M и N лежат в плоскости (A), то имеют место равенства

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

и

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0. \qquad (B)$$

Скалярное произведение вектора $\bar{n}\{A, B, C\}$ на вектор $\overline{MN}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ равно

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1).$$

Так как на основании (B) это скалярное произведение равно нулю, то вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\overline{MN}$, а тем самым и той плоскости, в которой лежит этот вектор, т. е. вектор $\bar{n}\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Заключение. Геометрическое значение коэффициентов A, B и C в общем уравнении плоскости (17, 1) состоит в том, что они являются проекциями на координатные оси Ox, Oy, Oz вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Задача 17, 33. Найти следы плоскости $3x+2y-4z+5=0$ на координатных плоскостях.

Решение. Уравнение прямой, по которой данная плоскость пересекается с плоскостью xOy, мы получим как уравнение геометрического места точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению данной плоскости и уравнению плоскости xOy. Так как плоскость xOy имеет уравнение $z=0$, то уравнение искомого следа получим, положив в уравнение данной плоскости $z=0$.

Окончательно уравнения искомого следа данной плоскости на плоскости xOy имеют вид

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Первое из этих уравнений изображает плоскость, параллельную оси Oz, а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются точки, принадлежащие плоскости xOy (в плоскости xOy первое из этих уравнений определяет прямую линию).

Уравнение искомого следа на плоскости yOz получим, учитывая, что плоскость yOz имеет уравнение $x = 0$. Положив в данном уравнении $x = 0$, получим уравнения следа плоскости на плоскости yOz

$$\left.\begin{aligned} 2y - 4z + 5 = 0 \\ x = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Первое из этих уравнений есть уравнение плоскости, параллельной оси Ox, а второе указывает на то, что в этой плоскости рассматриваются только точки, принадлежащие плоскости yOz (в плоскости yOz первое из уравнений определяет прямую линию).

Наконец, след данной плоскости на плоскости xOz, уравнение которой $y = 0$, мы получим, положив $y = 0$ в уравнении данной плоскости. Уравнения этого следа

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\},$$

причем первое из них — уравнение плоскости, параллельной оси Oy, а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются только точки, лежащие в плоскости xOz (первое уравнение в плоскости xOz определяет прямую линию).

Задача 17, 34 (для самостоятельного решения). Найти следы плоскости $5x + 3y + 2z - 12 = 0$ на координатных плоскостях и построить эти следы.

Ответ. Уравнение следа на плоскости xOy

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y - 12 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\};$$

уравнение следа на плоскости yOz

$$\left.\begin{aligned} 3y + 2z - 12 = 0 \\ x = 0. \end{aligned}\right\};$$

уравнение следа на плоскости xOz

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2z - 12 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Задача 17, 35. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, -1)$; $M_2(-1, 0, 4)$; $M_3(-2, -1, 1)$.

Решение. На основании уравнения (17, 26) можно уравнение искомой плоскости написать в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель, получим

$$-4(x-1)-15(y-2)+6(z+1)+15(x-1)+$$
$$+4(y-2)-6(z+1)=0.$$

Раскрывая скобки, делая приведение подобных членов и сокращая на 11, получим окончательно $x-y+1=0$. Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz.

Задача 17, 36 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1, -3, 4)$; $M_2(0, -2, -1)$; $M_3(1, 1, -1)$.

Ответ. $15x-5y-4z-14=0$.

Задача 17, 37 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$; $M_2(2, 1, 3)$; $M_3(0, -1, -1)$.

Ответ. $5x+3y-4z-1=0$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Основные задачи на прямую в пространстве.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается прямой линии в пространстве. Напомним основные формулы:

1. Канонические уравнения прямой линии в пространстве, или уравнения прямой с направляющими коэффициентами, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{18, 1}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки, через которую проходит прямая, а m, n и p — направляющие коэффициенты прямой, которые являются проекциями на координатные оси Ox, Oy, Oz направляющего вектора прямой.

Если α, β и γ — углы между прямой и координатными осями Ox, Oy и Oz, то

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \tag{18, 2}$$