Решение. На основании уравнения (17, 26) можно уравнение искомой плоскости написать в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель, получим

$$-4(x-1)-15(y-2)+6(z+1)+15(x-1)+$$
$$+4(y-2)-6(z+1)=0.$$

Раскрывая скобки, делая приведение подобных членов и сокращая на 11, получим окончательно $x-y+1=0$. Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz.

Задача 17, 36 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1, -3, 4)$; $M_2(0, -2, -1)$; $M_3(1, 1, -1)$.

Ответ. $15x-5y-4z-14=0$.

Задача 17, 37 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$; $M_2(2, 1, 3)$; $M_3(0, -1, -1)$.

Ответ. $5x+3y-4z-1=0$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Основные задачи на прямую в пространстве.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается прямой линии в пространстве. Напомним основные формулы:

1. Канонические уравнения прямой линии в пространстве, или уравнения прямой с направляющими коэффициентами, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{18, 1}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки, через которую проходит прямая, а m, n и p — направляющие коэффициенты прямой, которые являются проекциями на координатные оси Ox, Oy, Oz направляющего вектора прямой.

Если α, β и γ — углы между прямой и координатными осями Ox, Oy и Oz, то

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \tag{18, 2}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами прямой. Направляющие коэффициенты m, n и p можно рассматривать как проекции на координатные оси вектора, параллельного прямой, причем m, n и p не могут быть одновременно равны нулю. Уравнения (18,1) могут быть записаны также в виде

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}; \qquad (18,3)$$

2. В параметрическом виде уравнения прямой линии в пространстве записываются так:

$$x=x_0+mt; \quad y=y_0+nt; \quad z=z_0+pt, \qquad (18,4)$$

где t — параметр.

3. Общие уравнения прямой:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\}. \qquad (18,5)$$

Каждое из уравнений (18, 5) — уравнение плоскости, и таким образом прямая в пространстве может рассматриваться как пересечение двух плоскостей, причем плоскости эти предполагаются непараллельными, т. е. соотношение

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

не имеет места.

4. Условие параллельности двух прямых в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (18,6)$$

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

имеет вид

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}. \qquad (18,7)$$

5. Условие перпендикулярности двух прямых (18, 6) имеет вид

$$mm_1+nn_1+pp_1=0 \qquad (18,8)$$

6. Угол между двумя прямыми (18, 6) определяется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \qquad (18,9)$$

7. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, запишутся в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (18,10)$$

Задача 18, 1. Найти углы, которые прямая

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{6}$$

составляет с координатными осями.

Решение. По формулам (18, 2), полагая в них $m=2$, $n=3$, $p=6$, будем иметь

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\pm\frac{2}{\sqrt{49}},\ \text{или}\ \cos\alpha=\pm\frac{2}{7};$$

$$\cos\beta=\pm\frac{3}{7};\quad \cos\gamma=\pm\frac{6}{7}.$$

Проверьте, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Острые углы, составляемые прямой с координатными осями, равны: $\alpha=73°24'$; $\beta=64°37'$; $\gamma=31°1'$ (эти значения определены по таблицам тригонометрических функций),

Задача 18, 2. Общие уравнения прямой

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-\ y+\ z-4=0 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

преобразовать к каноническому виду (18, 1).

Наметим такой план решения задачи: из системы (A) исключим сначала y и выразим z через x, потом исключим x и выразим z теперь уже через y.

1) Для того, чтобы из системы (A) исключить y, умножим второе из уравнений системы (A) на 3 и сложим его почленно с первым. Получим, что $7x-z-7=0$, откуда $z=7x-7$,

$$z=\frac{x-1}{\frac{1}{7}}.$$

2) Умножая первое уравнение из (A) на -2 и складывая почленно со вторым, получим, исключая x из системы (A),

$$-7y+9z-14=0,$$

откуда

$$9z=7y+14;$$

$$z=\frac{7(y+2)}{9},$$

или

$$z=\frac{y+2}{\frac{9}{7}}.$$

Сравнивая найденные значения z, получаем уравнения прямой в каноническом виде

$$z=\frac{x-1}{\frac{1}{7}}=\frac{y+2}{\frac{9}{7}},\quad \text{или}\quad \frac{x-1}{\frac{1}{7}}=\frac{y+2}{\frac{9}{7}}=\frac{z-0}{1}.$$

Умножая теперь все знаменатели на 7, окончательно получим

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-0}{7}.$$

В учебнике Привалова указан и другой способ преобразования общих уравнений прямой (18, 5) к каноническому виду (стр. 250).

Рекомендуем внимательно изучить этот способ. В связи с тем, что в учебнике не указаны окончательные результаты, приведем их здесь.

Если общие уравнения прямой записываются в виде (18, 5)

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\},$$

то уравнения прямой с направляющими коэффициентами имеют вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (18, 11)$$

где x_0, y_0 и z_0 — координаты одной из точек, через которую проходит прямая (18,5)

Из уравнений (18, 11) усматриваем, что направляющие коэффициенты прямой m, n и p определяются по формулам

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot t; \quad n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\cdot t; \quad p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\cdot t, \qquad (18, 12)$$

в которых можно положить $t=1$ (на основании указаний в учебнике эти формулы рекомендуется получить самостоятельно).

Решим нашу задачу по этому способу. Определим одну из точек, через которую проходит данная прямая (A). Дадим координате z значение нуль ($z=0$). Для определения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+3y+5=0 \\ 2x-\ y-4=0 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x+3y&=-5 \\ 2x-\ y&=\ \ \ 4 \end{aligned}\right\},$$

из которой $x=1$; $y=-2$. Итак, одна из точек, через которую проходит прямая, известна. Ее координаты (1, —2, 0). Чтобы определить направляющие коэффициенты прямой по формулам (18, 12) в которых взято $t=1$, составляем матрицу из коэффициентов уравнений системы (A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и получаем

$$m = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$m = -1; \; n = -9; \; p = -7.$$

Уравнения прямой (A) в каноническом виде с учетом того, что прямая проходит через точку (1, —2, 0), примут вид

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-0}{-7}.$$

Умножая все знаменатели на —1, получим окончательно

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z-0}{7}.$$

Задача 18, 3 (для самостоятельного решения). Уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x - 4y + 5z - 1 &= 0 \\ 2x + 3y + z + 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

Указание. Воспользоваться вторым способом, указанным в предыдущей задаче.

1. Определите одну из точек, принадлежащую данной прямой. Координате z этой точки дайте произвольное значение, например, $z = 0$. Для определения координат x и y получите систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 4y &= 1 \\ 2x + 3y &= -9 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x = -3$; $y = -1$.

Итак, определена точка (— 3, — 1, 0), через которую проходит прямая.

Воспользовавшись для определения m, n и p формулами (18, 12) при $t = 1$, получим

$$m = -19; \; n = 9; \; p = 11.$$

Искомое уравнение в виде (18, 1) запишется так:

$$\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-0}{11}. \qquad (A)$$

Углы, образованные этой прямой с координатными осями, определяем по формулам (18, 2), в которых m, n и p имеют только что найденные значения:

$$\cos\alpha = \pm\frac{-19}{\sqrt{563}} = \mp 0{,}801, \quad \cos\beta = \pm\frac{9}{\sqrt{563}} = \pm 0{,}379;$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{11}{\sqrt{563}} = \pm 0{,}464.$$

Контроль: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. По известным косинусам углов находим углы $\alpha=143°14'$; $\beta=67°44'$; $\gamma=62°21'$ (при определении углов из двух возможных знаков у косинусов выбран верхний знак).

Уравнения прямой получились бы в другом виде, если бы вместо точки $(-3, -1, 0)$ на прямой взяли какую-либо другую точку. Числители дробей в (A) изменились бы, но знаменатели остались теми же. Если же решать эту задачу по способу первому, указанному в предыдущем номере, то в знаменателях могли бы получиться числа, пропорциональные тем, которые стоят в знаменателях дробей (A).

Задача 18, 4 (для самостоятельного решения). Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$x-2y+3z-4=0,$$
$$2x+3y-4z+5=0.$$

Ответ. Один из возможных видов канонических уравнений прямой

$$\frac{x-\frac{2}{7}}{-1}=\frac{y+\frac{13}{7}}{10}=\frac{z-0}{7}.$$

Задача 18, 5 (для самостоятельного решения). Преобразовать к каноническому виду уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+2z+8&=0\\ x-\ y-\ z-9&=0\end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Один из возможных видов канонических уравнений прямой

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-1}{-5}.$$

Задача 18, 6 (для самостоятельного решения). Найти углы которые прямая

$$\left.\begin{aligned}5x+3y-4z+2&=0\\ x+y+z-1&=0\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

образует с координатными осями.

Ответ. $\cos\alpha=\pm 0{,}60470$; $\cos\beta=\mp 0{,}77747$; $\cos\gamma=\pm 0{,}17277$.

Контроль: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Задача 18, 7. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\left.\begin{aligned}3x-4y+5z+\ 7&=0\\ x+2y+3z+11&=0\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

на координатные плоскости.

Чтобы найти уравнение плоскости, проектирующей прямую (A) на плоскость xOy, надо из системы (A) исключить координату z. Умножая первое уравнение этой системы на -3, а второе на 5 и складывая полученные уравнения, будем иметь $-4x+22y+34=0$, а сокращая на -2, получим искомое уравнение в виде $2x-11y-17=0$.

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (А) на плоскость xOz, получим, исключая из системы (A) координату y. Умножая второе уравнение в системе (A) на 2 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5x+11z+29=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (A) на плоскость yOz, получим, исключая из системы (A) координату x. Умножая второе уравнение в системе (A) на -3 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5y+2z+13=0.$$

Задача 18, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z-1&=0\\ 3x-y+z-2&=0\end{aligned}\right\}$$

на координатные плоскости.

Ответ. Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость yOz,

$$5y+4z+1=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость xOz,

$$5x+3z-3=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость xOy,

$$4x-3y-3=0.$$

Задача 18, 9. Определить следы прямой

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y-4z+8&=0\\ x-y+z+5&=0\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

Решение. Уравнение плоскости $xOy: z=0$. Положив в системе (A) $z=0$, получим систему из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y+8&=0\\ x-y+5&=0\end{aligned}\right\}.$$

Решая эту систему, найдем x и y:

$$x = -\frac{23}{8}; \quad y = \frac{17}{8};$$

и след прямой (A) на плоскости xOy имеет координаты $\left(-\frac{23}{8}, \frac{17}{8}, 0\right)$. Следы прямой на плоскостях yOz и xOz найдите самостоятельно.

Координаты следа прямой на плоскости yOz будут (0, 28, 23).

Координаты следа прямой на плоскости xOz — $\left(-\frac{28}{9}, 0, -\frac{17}{9}\right)$.

Задача 18, 10 (для самостоятельного решения). Найти координаты следов прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{4}$$

на координатных плоскостях.

Ответ. (1, —5, 0); $\left(\frac{7}{2}, 0, 10\right)$; (0, —7, —4).

Задача 18, 11. Найти острый угол между двумя прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Угол φ между двумя прямыми определяется по формуле (18, 9), в которой надо взять

$$m = 3; \quad n = -1; \quad p = 2;$$
$$m_1 = 2; \quad n_1 = 4; \quad p_1 = -2.$$

$$\cos\varphi = \pm \frac{3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}};$$

$$\cos\varphi = \pm \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{24}}; \quad \cos\varphi = \mp \frac{1}{2\sqrt{21}} = \mp 0,1091.$$

Так как нас по условию интересует острый угол между этими прямыми, мы должны $\cos\varphi$ взять положительным: $\cos\varphi = 0,1091$. Теперь, пользуясь таблицами тригонометрических функций, находим, что $\varphi = 83°44'$.

Задача 18, 12. Найти острый угол между прямыми

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z + 5 &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - 4 &= 0 \\ 2x + y - z - 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (18, 9) приведем заданные уравнения прямых к каноническому виду (18, 1) и получим

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-0}{5}, \qquad (A)$$

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-0}{3}. \qquad (B)$$

Пользуясь этими уравнениями прямых, по формуле (18, 9) определим, что $\cos\varphi=0{,}9445$, а $\varphi=19^\circ 11'$

Задача 18, 13. Через точку $A\,(3,\ -1,\ 4)$ привести прямую, параллельную оси Oz.

Решение. Уравнения оси Oz можно записать в виде

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}$$

(ось Oz проходит через начало координат, а ее направляющие косинусы равны $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=1$). Так как прямая проходит через точку $A\,(3,\ -1,\ 4)$, то ее уравнения запишутся в виде

$$\frac{x-3}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

Числа m, n и p в этих уравнениях из условия (18, 7) параллельности двух прямых должны быть пропорциональны числам 0,0 и 1 в уравнениях оси Oz. Заменяя поэтому в последних уравнениях числа m, n и p им пропорциональными, получим искомые уравнения в виде

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{1}.^{*}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\left.\begin{aligned} x-3&=0\\ y+1&=0 \end{aligned}\right\}$$

и искомая прямая может быть определена и этими уравнениями.

Задача 18, 14. Через точку $A\,(1,\ -1,\ 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}.$$

Решение. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку A:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

---

* Эту запись, содержащую нули в знаменателях, понимают условно, так, как это указано в учебнике Привалова (см. § 13 гл. 11, а также разъяснения на стр. 247).

Из условия (18, 7) параллельности двух прямых m, n и p в этих уравнениях должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 1, 3 и 2 данной прямой. Заменяя m, n и p числами, им пропорциональными, получим уравнения прямой в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 18, 15 (для самостоятельного решения). Через точку (2, —1, 3) провести прямую, параллельную оси Ox.

Ответ. $\left.\begin{matrix} y+1=0 \\ z-3=0 \end{matrix}\right\}$ или $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{0}$.

Задача 18, 16. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 2, -1)$ и $B(0, 3, -4)$.

Решение. Согласно (18, 10) имеем

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-3},$$

или, умножая все знаменатели на —1,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

Задача 18, 17 (для самостоятельного решения). Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(3, 0, 4)$ и $B(-1, -2, 3)$.

Ответ. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-4}{1}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи на прямую и плоскость.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие содержит упражнения по разделу «плоскость и прямая». Приводим основные формулы.

1. Острый угол между прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi=\left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|. \qquad (19, 1)$$