Из условия (18, 7) параллельности двух прямых m, n и p в этих уравнениях должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 1, 3 и 2 данной прямой. Заменяя m, n и p числами, им пропорциональными, получим уравнения прямой в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 18, 15 (для самостоятельного решения). Через точку (2, —1, 3) провести прямую, параллельную оси Ox.

Ответ. $\left.\begin{matrix} y+1=0 \\ z-3=0 \end{matrix}\right\}$ или $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{0}$.

Задача 18, 16. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(1,\ 2,\ -1)$ и $B(0,\ 3,\ -4)$.

Решение. Согласно (18, 10) имеем

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-3},$$

или, умножая все знаменатели на —1,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

Задача 18, 17 (для самостоятельного решения). Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(3,\ 0,\ 4)$ и $B(-1,\ -2,\ 3)$.

Ответ. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-4}{1}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи на прямую и плоскость.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие содержит упражнения по разделу «плоскость и прямая». Приводим основные формулы.

1. Острый угол между прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi=\left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|. \qquad (19,\ 1)$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (19,3)$$

4. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую

$$\left.\begin{matrix} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{matrix}\right\},$$

имеет вид

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (19,4)$$

где λ — любое действительное число.

Задача 19, 1. Найти острый угол между прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

и плоскостью

$$2x + y - z + 4 = 0.$$

Указание. Задача решается с помощью формулы (19, 1), в которой надо положить $A = 2$; $B = 1$; $C = -1$; $m = 2$; $n = 1$; $p = 2$.

Ответ. Угол $\varphi = 24°5'$.

Задача 19, 2. Найти острый угол между прямой

$$\left.\begin{matrix} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

Решение. Уравнения прямой нет надобности преобразовывать к каноническому виду. Достаточно определить направляющие коэффициенты m, n и p этой прямой (см. задачу (18, 2)). Составляем матрицу из коэффициентов уравнений (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и, полагая $t = 1$ в формулах (18, 12), получаем

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Из уравнения плоскости заключаем, что $A = 1$, $B = 1$, $C = 3$, и тогда для определения острого угла φ между прямой и плоскостью по формуле (19, 1) получаем

$$\sin\varphi = \left|\frac{-6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{38}}\right| = \frac{6}{\sqrt{418}} = 0{,}2935; \quad \varphi = 17°4'.$$

Задача 19, 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1,\ 2,\ -1)$, напишем на основании уравнения (17, 18) в виде

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Пользуясь условием (19, 3) перпендикулярности прямой и плоскости, заменив в последнем уравнении величины A, B и C им пропорциональными величинами m, n и p из уравнений прямой, т. е. числами 1, —3 и 4, и получим

$$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0,$$

а после упрощений будем иметь

$$x-3y+4z+9=0.$$

Задача 19, 4 (для самостоятельного решения). **Найти** уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2,\ -4,\ -2)$ перпендикулярно прямой

$$\left.\begin{array}{r}x-4y+5z-1=0\\ 2x+\ \ y\qquad\ +3=0\end{array}\right\}.$$

Ответ. $5x-10y-9z-68=0$.

Задача 19,5. Через точку (2, 1, 6) провести прямую, перпендикулярную плоскости $x-4y+5z-1=0$, и определить направляющие косинусы этой прямой.

Решение. Напишем прежде всего уравнения прямой, проходящей через данную точку:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-6}{p}.$$

На основании формул (19, 3) числа m, n и p пропорциональны числам A, B и C из уравнения плоскости, а потому, заменяя в последнем уравнении m, n и p соответственно числами 1, —4, 5, получим искомые уравнения в виде

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{5}.$$

Направляющие косинусы этой прямой определим по формулам (18, 2):

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}};\quad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{42}};$$

$$\cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{42}};\quad \cos\gamma=\pm\frac{5}{\sqrt{42}}.$$

Задача 19, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение перпендикуляра к плоскости

$$3x - y - 5z - 8 = 0,$$

проходящего через точку (1, —1, 2).

Ответ. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$.

Задача 19, 7. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{+5}$$

с плоскостью

$$x + y - 2z - 4 = 0.$$

Решение. Представим уравнение прямой в так называемом параметрическом виде. Пусть каждое из отношений, входящих в уравнение прямой, равно t:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5} (= t),$$

или

$$\frac{x-1}{3} = t; \quad \frac{y+1}{-1} = t; \quad \frac{z-2}{5} = t,$$

откуда

$$x = 3t + 1; \quad y = -t - 1; \quad z = 5t + 2. \qquad (A)$$

Это и есть параметрические уравнения данной прямой. Так как координаты точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять уравнениям прямой и уравнению плоскости, то, подставив значения x, y и z из (A) в уравнение плоскости, будем иметь

$$3t + 1 + (-t - 1) - 2(5t + 2) - 4 = 0.$$

Из него следует, что $t = -1$. Это значение t есть значение параметра в точке пересечения прямой и плоскости. Подставим это значение в уравнения прямой (A) и получим: $x = -2$, $y = 0$; $z = -3$. Итак, координаты точки пересечения данных прямой и плоскости будут (—2, 0, 3).

Задача 19, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнения перпендикуляра к плоскости

$$x + 3y - 4z - 13 = 0,$$

проходящего через точку (2, —1, 3), и определить координаты основания этого перпендикуляра.

Ответ. Уравнения перпендикуляра к плоскости

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Координаты основания этого перпендикуляра (3, 2, —1).

Задача 19, 9 (для самостоятельного решения). Найти координаты основания A перпендикуляра к плоскости $x-3y+4z+5=0$, проходящего через точку $(2,\ 1,\ -1)$.

Ответ. $A(2,\ 1,\ -1)$.

Задача 19, 10. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$$

и плоскости

$$3x-4y-z+5=0.$$

Решение. Поступаем, как обычно: уравнения прямой запишем в параметрическом виде:

$$\frac{x-1}{5}=t;\quad \frac{y+2}{4}=t;\quad \frac{z-1}{-1}=t.$$

Отсюда получаем

$$x=5t+1,$$
$$y=4t-2,$$
$$z=-t+1.$$

Подставляя эти значения x, y и z в уравнение плоскости, будем иметь

$$3(5t+1)-4(4t-2)-(-t+1)+5=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $15t-16t+t+15=0$, что можно представить в виде

$$0\cdot t+15=0.$$

Конечного значения t, удовлетворяющего этому уравнению, не существует. Значит, наша прямая не пересекает плоскости. Легко проверить, что прямая параллельна плоскости. Действительно, условие (19, 2) параллельности прямой и плоскости здесь выполняется. У нас $A=3$; $B=-4$; $C=-1$; $m=5$, $n=4$; $p=-1$ и $Am+Bn+Cp=3\cdot5+(-4)\cdot4+(-1)\cdot(-1)=0$.

Если бы это было замечено сразу, можно было бы не решать задачу.

Задача 19, 11 (для самостоятельного решения). Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

и плоскости

$$x+y-z+5=0.$$

Ответ. Прямая параллельна плоскости.

Перед тем как решать следующую задачу, усвойте по учебнику условия, при которых прямая $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Эти условия имеют вид

$$\begin{cases} Aa+Bb+Cc+D=0, & (19,5)\\ Am+Bn+Cp=0. & (19,6)\end{cases}$$

Задача 19, 12. Проверить, что прямая

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3} \qquad (A)$$

лежит в плоскости

$$x+y-z-6=0. \qquad (B)$$

Решение. Здесь $a=2$, $b=3$, $c=-1$;

$$m=2, \quad n=1, \quad p=3;$$

$$A=1, \quad B=1, \quad C=-1, \quad D=-6.$$

Проверьте, что условия (19, 5) и (19, 6) здесь выполнены, а это значит, что прямая (A) лежит в плоскости (B).

Задача 19, 13 (для самостоятельного решения). Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$$

и плоскости

$$2x-3y+z-3=0.$$

Ответ. Прямая лежит в плоскости.

Задача 19. 14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-4z+5=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{aligned}\right\}$$

и точку $M(1, -1, 2)$.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, на основании (19, 4) может быть записано так:

$$3x+y-4z+5+\lambda(x-y+2z-1)=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка плоскостей нам требуется выбрать ту, которая проходит через точку $M(1, -1, 2)$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение (A) координаты точки M, получим уравнение для определения λ: $5\lambda-1=0$; $\lambda=\frac{1}{5}$. Подставляя это значение λ в уравнение (A), получим

$$8x+2y-9z+12=0.$$

Задача 19, 15 (для самостоятельного решения). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 0)$ и прямую

$$\left.\begin{aligned} x-y+3z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. $x-7y+17z-9=0$.

Задача 19, 16 (для самостоятельного решения). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}.$$

Ответ. $2x+y-z-5=0$.

Задача 19, 17. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned}3x-y+z-5=0\\x+2y-z+2=0\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

параллельно прямой

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}. \qquad (B)$$

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (A), имеет вид

$$3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0,$$

или иначе

$$(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z-5+2\lambda=0. \qquad (C)$$

Из этого пучка плоскостей должна быть отобрана плоскость, параллельная прямой (B), и потому должно выполняться условие (19, 2) параллельности прямой и плоскости. На основании уравнения (C) $A=3+\lambda$, $B=2\lambda-1$, $C=1-\lambda$, а из уравнения (B) следует, что $m=-1$, $n=2$, $p=2$. Тогда условие параллельности прямой и плоскости запишется в виде

$$(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0,$$

или

$$-3-\lambda+4\lambda-2+2-2\lambda=0; \quad \lambda=3.$$

Подставляя это значение λ в (C), получаем

$$6x+5y-2z+1=0.$$

Задача 19, 18. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2} \qquad (A)$$

перпендикулярно плоскости

$$3x-y+2z-2=0. \qquad (B)$$

Решение Уравнения прямой запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}\\\frac{x-1}{2}=\frac{z}{2}\end{aligned}\right\}, \text{ или после упрощений } \left.\begin{aligned}x-2y-5=0\\x-z-1=0\end{aligned}\right\}.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x-2y-5+\lambda(x-z-1)=0,$$

или

$$(1+\lambda)x-2y-\lambda z-5-\lambda=0. \qquad (C)$$

Из этого пучка плоскостей отберем ту плоскость, которая перпендикулярна плоскости (B). Условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид (17, 21). В нашем случае

$$A_1=3;\quad B_1=-1;\quad C_1=2;$$
$$A_2=1+\lambda;\quad B_2=-2;\quad C_2=-\lambda,$$

а потому указанное условие примет вид

$$3(1+\lambda)+(-1)(-2)+2(-\lambda)=0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$3+3\lambda+2-2\lambda=0$$

и

$$\lambda=-5.$$

Подставляя это значение λ в (C), получаем уравнение искомой плоскости в виде

$$4x+2y-5z=0.$$

Задача 19, 19 (для самостоятельного решения). **Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую**

$$3x+2y+3z-5=0,$$
$$x+y+z-4=0$$

параллельно прямой

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z+1&=0\\ 2x+y-3z+2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Ответ. $7x-4y+7z+49=0$.

Задача 19, 20 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-1&=0\\ x-y+z+5&=0\end{aligned}\right\}$$

перпендикулярно плоскости $2x+2y-z+5=0$.

Ответ. $4x-3y+2z+26=0$.

Задача 19, 21. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4};$$
$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

Решение. Уравнения первой прямой запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-1}{2}&=\frac{y-3}{3}\\ \frac{x-1}{2}&=\frac{z}{4}\end{aligned}\right\},$$

или после упрощений

$$\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ 2x-z-2=0.\end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, запишется так:

$$3x-2y+3+\lambda(2x-1z-2)=0,$$

или

$$(3+2\lambda)x-2y-\lambda z+3-2\lambda=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка выделим ту плоскость, которая проходит через вторую прямую. Вторая прямая, как видно из ее уравнения, проходит через точку $M(-2,-1,1)$, а потому и плоскость, проходящая через вторую прямую, должна содержать эту точку. Подставляя в (A) координаты точки $M(-2,-1,1)$ вместо текущих координат, получим для определения λ уравнение

$$(3+2\lambda)(-2)-2\cdot(-1)-\lambda\cdot 1+3-2\lambda=0; \qquad \lambda=-\frac{1}{7}.$$

Подставляя это значение λ в уравнение (A), получим

$$19x-14y+z+23=0.$$

Задача 19, 22 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3},$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Ответ. $4x+13y-z-5=0$.

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Поверхности второго порядка.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие является последним по курсу аналитической геометрии. Оно посвящается поверхностям второго порядка.

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x, y, z)=0$.