Решение. Уравнения первой прямой запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= \frac{y-3}{3} \\ \frac{x-1}{2} &= \frac{z}{4} \end{aligned}\right\},$$

или после упрощений

$$\begin{cases} 3x-2y+3=0, \\ 2x-z-2=0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, запишется так:

$$3x-2y+3+\lambda(2x-1z-2)=0,$$

или

$$(3+2\lambda)x-2y-\lambda z+3-2\lambda=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка выделим ту плоскость, которая проходит через вторую прямую. Вторая прямая, как видно из ее уравнения, проходит через точку $M(-2,-1,1)$, а потому и плоскость, проходящая через вторую прямую, должна содержать эту точку. Подставляя в (A) координаты точки $M(-2,-1,1)$ вместо текущих координат, получим для определения λ уравнение

$$(3+2\lambda)(-2)-2\cdot(-1)-\lambda\cdot 1+3-2\lambda=0; \qquad \lambda=-\frac{1}{7}.$$

Подставляя это значение λ в уравнение (A), получим

$$19x-14y+z+23=0.$$

Задача 19, 22 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3},$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Ответ. $4x+13y-z-5=0.$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Поверхности второго порядка.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие является последним по курсу аналитической геометрии. Оно посвящается поверхностям второго порядка.

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x, y, z)=0$.

Если это уравнение можно разрешить относительно z, то получим уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$. Уравнение поверхности может и не содержать всех трех переменных: x, y и z.

1. Сфера. Сферой называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром сферы.

а) Уравнение сферы имеет вид.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{20, 1}$$

где a, b и c — координаты центра сферы, а R — ее радиус.

б) Уравнение сферы с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{20, 2}$$

Задача 20, 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

Решение. Подставляя в уравнение сферы (20, 2) $R = 5$, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Задача 20, 2. Составить уравнение сферы радиуса $R = 3$ с центром в точке $C(-1, 2, -3)$.

Решение. Подставляя в (20, 1) $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$ и $R = 3$, будем иметь

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0.$$

Задача 20, 3 (для самостоятельного решения). Написать уравнение сферы радиуса $R = 8$ с центром в точке $C(1, 1, -1)$.

Ответ. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 61 = 0$.

Задача 20, 4 (для самостоятельного решения). Составить уравнение сферы радиуса $R = 6$ с центром в точке $C(-1, -2, -4)$.

Ответ. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 8z - 15 = 0$.

Задача 20, 5. Определить координаты центра сферы и ее радиус

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0.$$

Решение. Представим это уравнение в виде (20, 1) для чего

1) объединим в группы члены, содержащие одноименные координаты;

2) выделим в этих группах полные квадраты (мы так же поступали и при определении координат центра окружности и ее радиуса). Поступая, как указано, получим

$$\underbrace{x^2 - 6x}_{\text{I}} + \underbrace{y^2 + 8y}_{\text{II}} + \underbrace{z^2 + 10z}_{\text{III}} + 25 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в подчеркнутых группах, получим

$$\underbrace{(x-3)^2-9}_{\text{I}}+\underbrace{(y+4)^2-16}_{\text{II}}+\underbrace{(z+5)^2-25}_{\text{III}}+25=0,$$

а упрощая, будем иметь

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2-25=0.$$

и окончательно

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$$

Сравнивая с (20, 1), имеем

$$a=+3,\ b=-4;\ c=-5;\ R^2=25.$$

Итак, центр сферы — точка $C(3, -4, -5)$, $R=5$.

Задача 20, 6. Определить координаты центра и радиус сферы

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x+12y-16z+1=0.$$

Решение. Для приведения этого уравнения к виду (20, 1) разделим обе части данного уравнения на коэффициент при x^2 и получим

$$x^2+y^2+z^2-x+3y-4z+\frac{1}{4}=0.$$

Будем следовать плану, намеченному в предыдущей задаче. Объединяя в группы члены, содержащие одноименные координаты, и выделяя в каждой такой группе полный квадрат, получим

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(z-2)^2-4+\frac{1}{4}=0.$$

Отсюда уже получаем уравнение сферы в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{4}.$$

Центр сферы C имеет координаты $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$, а ее радиус $R=\frac{5}{2}$.

Задача 20, 7 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2+x-y+z=0.$$

Ответ. $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 20, 8 (для самостоятельного решения). Найти радиус и координаты центра сферы

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0.$$

Ответ. $C(2, 0, 0)$; $R=3$.

Задача 20, 9 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0.$$

Ответ. $C(-a, -b, -c)$; $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

При этом предполагаем, что $a^2+b^2+c^2-d>0$. Если бы оказалось, что $a^2+b^2+c^2-d<0$, то сфера называлась бы мнимой; при $a^2+b^2+c^2-d=0$ сфера имела бы радиус $R=0$.

Задача 20, 10. Сфера проходит через точку $A(-2, 3, 5)$, а ее центр находится в начале координат. Составить уравнение сферы.

Решение. Радиус сферы легко определить, как расстояние от центра сферы (начала координат) до точки A на сфере. По формуле для определения расстояния между двумя точками в пространстве получаем

$$R=\sqrt{38}.$$

Подставляя это значение R в уравнение (20, 1), будем иметь искомое уравнение сферы

$$x^2+y^2+z^2=38.$$

Задача 20, 11 (для самостоятельного решения). Сфера имеет центр в точке $C(5, 7, -1)$ и проходит через начало координат. Найти ее уравнение.

Ответ. $x^2+y^2+z^2-10x-14y+2z=0$.

2. **Цилиндрические поверхности.** Цилиндрической поверхностью, или цилиндром, называется поверхность, описанная бесконечной прямой (образующей), которая движется, оставаясь все время параллельной данной прямой и пересекая данную кривую (направляющую).

Мы будем рассматривать только такие цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из координатных осей, а направляющей является плоская кривая, лежащая в одной из координатных плоскостей.

Уравнения таких цилиндрических поверхностей содержат только две переменные величины. В них будет отсутствовать переменная, одноименная с той координатной осью, которой параллельны образующие цилиндрической поверхности.

Так, всякое уравнение вида

$$F(x, y)=0 \text{ или } y=f(x), \tag{20,3}$$

содержащее только две переменные x и y, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны координатной оси Oz, а направляющая лежит в плоскости xOy, причем ее уравнение есть одно из уравнений (20,3). Всякое уравнение вида

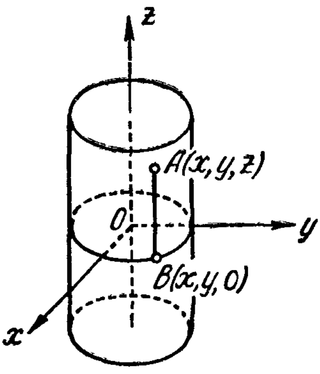
$$z=f(x) \text{ или } F(x, z)=0, \tag{20,4}$$

содержащее только две переменные x и z и не содержащее переменной y, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oy, а направляющей является линия, лежащая в плоскости xOz и имеющая своим уравнением одно из уравнений (20,4).

Точно так же всякое уравнение вида

$$F(y, z) = 0 \text{ или } z = f(y), \tag{20,5}$$

содержащее только две переменные y и z и не содержащее переменной x, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Ox, а направляющей служит линия, лежащая в плоскости yOz и имеющая своим уравнением одно из уравнений (20,5).



Фиг. 20,1.

Задача 20, 12. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2?$$

Решение. Данное уравнение содержит только две переменные x и y и определяет в пространстве на основании уравнений (20,3) цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит окружность $x^2 + y^2 = r^2$, лежащая в плоскости xOy.

Приводим более подробные разъяснения полученного заключения. В плоскости xOy данное уравнение определяет окружность радиуса r с центром в начале координат. Пусть эта окружность является направляющей цилиндра, а его образующие параллельны оси Oz. Возьмем на цилиндре (фиг. 20,1) любую точку A с координатами x, y, z — $A(x, y, z)$ и спроектируем ее на плоскость xOy. Ее проекция — точка B с координатами x, y и 0 находится на окружности, которая служит направляющей, а потому координаты x и y точки B удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = r^2$. Но так как абсцисса и ордината точки $A(x, y, z)$ на цилиндрической поверхности такие же, как абсцисса и ордината точки $B(x, y, 0)$ на окружности, то, учитывая, что уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ не содержит переменной z, можно сказать, что этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки $A(x, y, z)$, лежащей на цилиндре.

Таким образом, данное уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит эта окружность, лежащая в плоскости xOy.

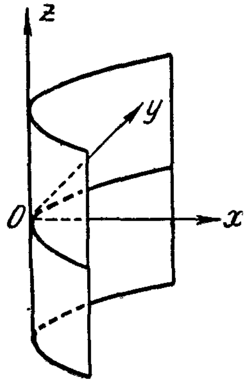
Задача 20, 13. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

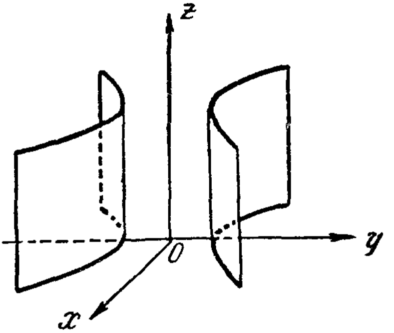
Решение. Данное уравнение содержит только две переменные x и y и на основании (20,3) определяет в пространстве цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс. Такой цилиндр называется эллиптическим. К этому же выводу можно прийти, повторяя рассуждения предыдущей задачи.

Задача 20, 14 (для самостоятельного решения). Какую поверхность определяет уравнение $y^2 = 2px$ (фиг. 20,2)?

Ответ. Уравнение $y^2 = 2px$ определяет параболический цилиндр с образующим, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндра служит парабола $y^2 = 2px$, лежащая в плоскости xOy.



Фиг. 2,02



Фиг. 20,3.

Задача 20, 15. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1?$$

Ответ. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ — уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, а направляющей служит данная гипербола, лежащая в плоскости xOy (фиг. 20, 3). Такой цилиндр называется гиперболическим.

Задача 20, 16. Какие поверхности определяют уравнения

1) $x^2 + z^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение. Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z и определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу; 4) гиперболу.

В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ — уравнение прямого кругового цилиндра;

2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра;

3) $x=2z^2$ — уравнение параболического цилиндра;

4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ — уравнение гиперболического цилиндра.

Задача 20, 17. Какие поверхности определяют уравнения 1) $yz=5$, 1) $y=6z^2$, 3) $y^2+z^2=9$, 4) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

Ответ. 1) $yz=5$ — уравнение гиперболического цилиндра;

2) $y=6z^2$ — уравнение параболического цилиндра;

3) $y^2+z^2=9$ — уравнение прямого кругового цилиндра;

4) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра.

Образующие всех этих цилиндрических поверхностей параллельны оси Ox.

Задача 20, 18 (для самостоятельного решения). Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2+y^2-4y=0?$$

Ответ. В пространстве уравнение определяет прямой круговой цилиндр, для которого данная окружность служит направляющей. Образующие цилиндра параллельны оси Oz, причем сама ось является одной из образующих, так как данная окружность проходит через начало координат. Постройте эскиз цилиндра.

Задача 20, 19. Какую поверхность определяет уравнение

$$y^2+z^2-2az=0?$$

Ответ. Прямой круговой цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox.

Задача 20, 20. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0?$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0,$$

что в свою очередь может быть записано так:

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$$

Каждое из этих уравнений определяет плоскость, проходящую через ось Oy, причем ось Oy является прямой пересечения этих плоскостей.

3. **Линия в пространстве.** Линия в пространстве может рассматриваться как пересечение двух поверхностей. Если уравне-

ния этих поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $F_1(x, y, z) = 0$, то эти два уравнения

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ F_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20, 6)$$

и являются уравнениями линии в пространстве. Таким образом, линия в пространстве есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе (20, 6).

Решим несколько задач, связанных с линиями в пространстве.

Задача 20, 21. Какая линия изображается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-7)^2 &= 16 \\ z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Решение. Первое из уравнений системы определяет сферу, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Так как данная плоскость пересекает данную сферу, то линией пересечения будет окружность. Значит, линия, о которой идет речь в задаче,— окружность лежащая в плоскости $z = 6$.

Запишем уравнение этой окружности в другом виде. Исключим z из данной системы уравнений. Сделать это надо так в первое уравнение системы подставить значение $z = 6$. Получим

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + (6-7)^2 &= 16 \\ z &= 6 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= 16 \\ z &= 6 \end{aligned}\right\}.$$

Окончательно

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 15 \\ z &= 6 \end{aligned}\right\}.$$

Первое уравнение определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого осью служит ось Oz, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Первое уравнение этой системы $x^2 + y^2 = 15$ на плоскости xOy определяет окружность, являющуюся прямоугольной проекцией той окружности, которая определяется заданной системой уравнений.

Задача 20, 22. Какую линию определяет система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= 1 \\ z &= 5 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Первое уравнение этой системы определяет в пространстве эллиптический цилиндр, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Линией их пересечения будет эллипс, лежащий в данной плоскости. Его прямоугольной проекцией на плоскость xOy будет эллипс, определяемый первым из уравнений системы.

Задача 20, 23. Какая линия определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= z \\ x &= 5 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Первое из данных уравнений определяет в пространстве параболический цилиндр, а второе — плоскость, параллельную плоскости yOz. Эта плоскость пересечет параболический цилиндр по параболе. Итак, линия, определяемая заданной системой уравнений,— парабола, лежащая в плоскости $x = 5$. Проекцией этой параболы на плоскость yOz будет парабола, определяемая первым уравнением данной системы.

Задача 20, 24 (для самостоятельного решения). Какая линия определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 9 \end{aligned}\right\}?$$

Ответ. Окружность, лежащая в плоскости $z = 9$, параллельной плоскости xOy. Проекцией этой окружности на плоскость xOy будет окружность

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Второе из этих уравнений указывает на то, что окружность, определяемая первым уравнением, лежит в плоскости xOy, уравнение которой $z = 0$.

4. **Поверхность вращения.** В учебнике Привалова на странице 269 выведено простое правило, позволяющее по известному уравнению вращающейся линии получить уравнение поверхности вращения.

Приведем здесь это правило и дадим к нему разъяснения.

Правило. *Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.*

Разъясним это правило.

Уравнение линии, лежащей в плоскости yOz, содержит в общем случае две переменные величины: y и z и имеет вид

$$f(y, z) = 0.$$

Уравнение же поверхности в общем случае содержит три текущих координаты: x, y и z.

Уравнение вращающейся линии надо преобразовать так, чтобы оно стало уравнением поверхности вращения Правило указывает, что в уравнении вращающейся линии $f(y, z) = 0$ текущая координата z должна быть заменена на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Это надо понимать так, что в этом уравнении вторая текущая *координата y, одноименная с осью вращения Oy, должна быть оставлена без изменения.*

Таким образом, преобразованное уравнение в общем случае будет содержать три текущих координаты: x, y и z.

Если бы вращение линии $f(y, z) = 0$ происходило не вокруг оси Oy, а вокруг оси Oz, то, чтобы получить уравнение поверхности вращения, следовало бы в уравнении кривой текущую *координату z, соответствующую оси вращения Oz, оставить без изменения*, две же другие текущие координаты x и y ввести, заменив в уравнении кривой y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Аналогично поступают в случаях, когда происходит вращение линии, лежащей в плоскостях xOy и xOz. Ниже рассматривается ряд задач на применение этого правила.

Задача 20, 25. Окружность $x^2 + y^2 - r^2$ вращается вокруг оси Ox. Найти уравнение поверхности вращения (сферы).

Решение. Чтобы написать уравнение поверхности вращения, полученной от вращения заданной окружности вокруг оси Ox, следует в уравнении окружности переменную x, соответствующую оси вращения, оставить без изменения. Вторую же переменную y в уравнении окружности заменить на $\pm$ корень квадратный из суммы квадратов двух остальных переменных — y и z, т. е. на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$; тогда уравнение поверхности вращения запишется так:

$$x^2 + (\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = r^2,$$

т. е. в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ (сфера)}.$$

Задача 20, 26. Прямая $x = z$ вращается вокруг оси Oz. Найти уравнение поверхности вращения (конуса).

Решение. Так как в уравнение линии входят только переменные x и z, то линия лежит в плоскости xOz.

Для написания уравнения поверхности вращения в уравнении прямой переменная z должна остаться без изменения, так как она соответствует оси вращения Oz. Вторая же переменная x в уравнении прямой должна быть заменена $\pm$ корнем квадратным из суммы квадратов двух остальных переменных x и y, т. е. $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Уравнение поверхности вращения запишется так:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим окончательно уравнение поверхности вращения в виде

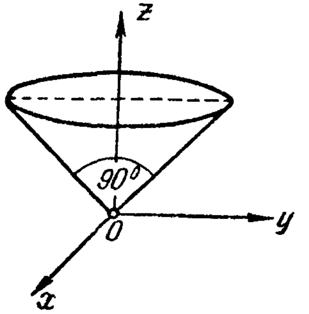
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

или

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ (конус)}.$$

Вершина этого конуса находится в начале координат, а так как прямая $x = z$ является биссектрисой координатного угла xOz, то угол в осевом сечении этого конуса равен $90°$ (фиг. 20,4). Следует запомнить, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ определяет конус с вершиной в начале координат и углом в осевом сечении, равным $90°$. Осью этого конуса является ось Oz. Если бы вращение прямой $x = z$ происходило не вокруг оси Oz, а вокруг оси Ox, то мы получили бы уравнение поверхности вращения, оставив в этом уравнении без изменения переменную x и заменив переменную z на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Уравнение поверхности вращения приняло бы вид

$$x = \pm\sqrt{y^2 + z^2},$$



Фиг. 20,4.

а после возведения обеих частей равенства в квадрат $x^2 = y^2 + z^2$, или окончательно $y^2 + z^2 - x^2 = 0$.

Задача 20, 27 (для самостоятельного решения). Прямая $y = z$ вращается вокруг оси Oy. Найти уравнение поверхности вращения (конуса).

Ответ. $x^2 + z^2 - y^2 = 0$.

Задача 20, 28 (для самостоятельного решения). Определить уравнение поверхности вращения, образованной вращением прямой $y = 3x$ вокруг оси Ox (конус).

Ответ. $y^2 + z^2 - 9x^2 = 0$.

Задача 20, 29. Определить уравнение поверхности вращения, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) вокруг оси Ox;
2) вокруг оси Oy.

Решение. 1) Уравнение кривой содержит координаты x и y, значит, кривая лежит в плоскости xOy.

Для определения уравнения поверхности, образованной вращением эллипса вокруг оси Ox, надо в уравнении эллипса переменную x, соответствующую оси вращения, оставить без изменения, а вторую переменную y в уравнении эллипса заменить на $\pm$ корень квадратный из суммы квадратов двух остальных переменных, т. е. на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$.

Искомое уравнение поверхности вращения будет выглядеть так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Эта поверхность называется эллипсоидом вращения.

2) Если же вращать данный эллипс вокруг оси Oy, то переменную y, соответствующую оси вращения, в уравнении эллипса следует оставить без изменения, а переменную x заменить на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

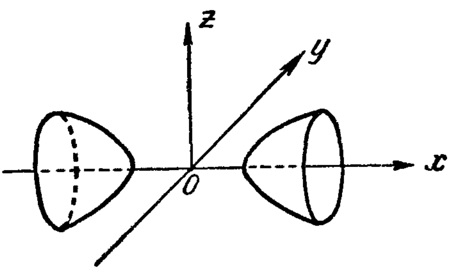
В этом случае уравнение поверхности вращения будет таким:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

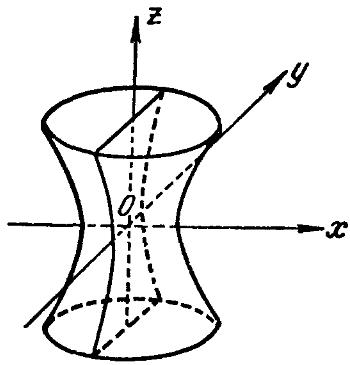
или

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Эта поверхность также называется эллипсоидом вращения.



Фиг. 20,5.



Фиг. 20.6.

Задача 20, 30 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг 1) оси Ox; 2) оси Oz.

Ответ. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$ — эллипсоид вращения;

2) $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид вращения.

Задача 20, 31. Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг 1) оси Ox; 2) оси Oz.

Ответ. 1) $\frac{y^2+z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$ (двухполостный гиперболоид вращения, фиг. 20, 5).

2) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид вращения, фиг. 20, 6).

Задача 20, 32 (для самостоятельного решения). Парабола $y^2 = 2pz$ вращается вокруг оси Oz. Написать уравнение поверхности вращения.

Ответ. Полагая $\frac{1}{2p} = a$, получим $z = a(x^2 + y^2)$. Эта поверхность называется параболоидом вращения.

Задача 20, 33 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, полученной от вращения параболы $y^2 = x$ вокруг оси Ox.

Ответ. $x = y^2 + z^2$ (параболоид вращения).

Задача 20, 34 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x + z = 1$ вокруг оси Oz.

Ответ. $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$.

Поверхность — конус с вершиной в точке $C(0, 0, 1)$. Угол в осевом сечении этого конуса равен $90°$.

В заключение решим несколько простых задач, связанных с поверхностями второго порядка, заданными простейшими уравнениями. Приводим для справок простейшие уравнения поверхностей второго порядка.

1. Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (20, 7)$$

(a, b и c — полуоси эллипсоида).

2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (20, 8)$$

В пересечении поверхности однополостного гиперболоида с координатными плоскостями получаются кривые:

1) с плоскостью $xOy\,(z = 0)$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, который называется главным;

2) с плоскостью xOz — гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3) с плоскостью yOz — гипербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Вершины главного эллипса (иногда он называется горловым) называются вершинами гиперболоида, а оси этого эллипса — поперечными осями гиперболоида. Их длины равны $2a$ и $2b$. Ось гиперболоида (20, 8), расположенная по оси Oz и равная по длине $2c$, называется его продольной осью.

В случае, когда продольная ось однополостного гиперболоида расположена по оси Ox, уравнение его поверхности запишется в виде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad (20, 9)$$

для случая же, когда продольная ось однополостного гиперболоида находится на оси Oy, его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{20, 10}$$

3) Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{20, 11}$$

Плоскость xOy не пересекает поверхности двуполостного гиперболоида (20, 11). Плоскости xOz и yOz пересекают поверхность (20, 11) соответственно по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

которые называются главными гиперболами. Отрезок длиною $2c$, расположенный по оси Oz, называется продольной осью двуполостного гиперболоида (20, 11), а отрезки длиною $2a$ и $2b$, расположенные соответственно по осям Ox и Oy, называются его поперечными осями.

У двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{20, 12}$$

продольная ось расположена по оси Oy, а у двуполостного гиперболоида

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1 \tag{20, 13}$$

она расположена по оси Ox.

4. Действительный конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{20, 14}$$

Вершина этого конуса находится в начале координат, он состоит из двух частей, расположенных по обе стороны от вершины. Одной из возможных направляющих этого конуса является эллипс

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{aligned}\right\}.$$

У конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{20, 15}$$

вершина находится в начале координат, он состоит из двух частей, расположенных по разные стороны плоскости xOz. Одной из возможных его направляющих является эллипс

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = b \end{aligned}\right\}.$$

У конуса же

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \tag{20, 16}$$

вершина находится в начале координат, а две его части расположены по разные стороны плоскости yOz. Одной из возможных его направляющих является эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=a\end{aligned}\right\}.$$

5. Эллиптический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}. \tag{20, 17}$$

Ось Oz называется его осью.

У эллиптического параболоида

$$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2r} \tag{20, 18}$$

осью служит ось Oy, а у эллиптического параболоида

$$x=\frac{y^2}{2q}+\frac{z^2}{2r} \tag{20, 19}$$

осью служит ось Ox.

6. Гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}. \tag{20, 20}$$

Задача 20, 35. Найти главные сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,$$

определить координаты их вершин и длину осей.

Решение. Главными сечениями эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ называются линии, по которым эллипсоид пересекается с координатными плоскостями. Плоскость xOy имеет уравнение $z=0$. Полагая в уравнении эллипсоида $z=0$, получим уравнение линии пересечения эллипсоида с плоскостью xOy

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{aligned}\right\},$$

которое в плоскости xOy определяет эллипс. В сечении данного эллипсоида плоскостью $y=0$ (координатная плоскость xOz) получается эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{aligned}\right\}.$$

Координатная же плоскость yOz, уравнение которой $x = 0$, пересекает данный эллипсоид по эллипсу

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Таким образом, главные сечения данного эллипсоида определены: это эллипсы, лежащие в координатных плоскостях.

Координаты вершин этих эллипсов и определят координаты вершин эллипсоида. Вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOy, имеют координаты (5, 0, 0), (—5, 0, 0), (0, 4, 0) и (0, —4, 0); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOz, имеют координаты (5, 0, 0) (—5, 0, 0) (0, 0, 2) и (0, 0, —2); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости yOz, имеют координаты (0, 4, 0), (0, —4, 0); (0, 0, 2) и (0, 0, —2). Соединяя эти результаты, приходим к такому заключению: у эллипсоида всего 6 вершин и их координаты: $A_1(5, 0, 0)$, $A_2(-5, 0, 0)$, $A_3(0, 4, 0)$, $A_4(0, -4, 0)$, $A_5(0, 0, 2)$ и $A_6(0, 0, -2)$.

Сравнивая уравнение данного эллипсоида с уравнением эллипсоида (20, 7), заключаем следующее:

$a^2 = 25$; полуось $a = 5$, а ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Ox, будет $2a = 10$;

$b^2 = 16$; полуось $b = 4$, а ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Oy, будет $2b = 8$;

$c^2 = 4$; полуось $c = 2$, а ось эллипсоида, расположенная по оси Oz, равна $2c = 4$.

Задача 20, 36 (для самостоятельного решения). Определить главные сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

а также координаты его вершин и длину осей.

Ответ.

1) Уравнения главных сечений:

а) $\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{64} + \frac{z^2}{25} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$; в) $\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{25} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$.

2) Длина осей: $2a = 16$; $2b = 14$; $2c = 10$.

3) Вершины эллипсоида: $A_1(8, 0, 0)$, $A_2(-8, 0, 0)$, $A_3(0, 7, 0)$, $A_4(0, -7, 0)$, $A_5(0, 0, 5)$ и $A_6(0, 0, -5)$.

Задача 20, 37. Найти линии пересечения поверхности гиперболоида

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} - \frac{z^2}{9} = 1$$

с координатными плоскостями и с плоскостями

$$z = 2, \ x = 3.$$

Ответ. а) Уравнение линии пересечения данного гиперболоида с координатной плоскостью xOy

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}\text{ (эллипс);}$$

б) с плоскостью yOz гиперболоид пересекается по линии

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола);}$$

в) с плоскостью xOz — по линии

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}-\frac{z^2}{9}&=1\\ y&=0\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола).}$$

Уравнение линии пересечения гиперболоида с плоскостью $z=2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{26}&=1\\ z&=2\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}\text{(эллипс, лежащий в}\\ \text{плоскости } z=2)\end{array}$$

Уравнение линии пересечения с плоскостью $x=3$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{6}&=1\\ x&=3\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола).}$$

Задача 20, 38. Какие поверхности определяются уравнениями

1) $x^2+y^2-z^2=0$; 2) $z=x^2+y^2$;

3) $y^2+z^2-\frac{x^2}{4}=0$; 4) $\frac{x^2+z^2}{6}-\frac{y^2}{15}=-1$;

5) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{1}-1=0$; 6) $-x^2+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{7}=0$;

7) $z=-(x^2+y^2)$; 8) $z=1-x^2-y^2$.

Ответ. 1) Круговой конус, у которого осью является ось Oz.
2) Параболоид вращения, у которого осью является ось Oz.
3) Круговой конус, у которого ось вращения совпадает с осью Ox.
4) Двухполостный гиперболоид вращения, у которого ось вращения совпадает с осью Oy.
5) Из сравнения с (20, 10) заключаем, что это однополостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Oy.
6) Конус, у которого ось совпадает с осью Ox.
7) Параболоид вращения.
8) Параболоид вращения.

Задача 20, 39. Какие поверхности определяются уравнениями
1) $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$;
2) $4x^2 - 8y^2 + 16z^2 = 0$;
3) $8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$;
4) $y^2 = 6x - 4$;
5) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$;
6) $3x^2 + 5y^2 = 12z$;
7) $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$;
8) $z^2 - 4x = 0$;
9) $2x^2 - 3z^2 = -12y$;
10) $4x^2 - 12y^2 - 6z^2 = 12$.

Ответ. 1) Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

2) Из сравнения с (20, 15) очевидно, что это конус.

3) Из сравнения с (20, 10) заключаем, что это однополостный гиперболоид, продольная ось которого расположена по оси Oy.

4) Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

5) Перепишем уравнение в виде

$$y^2 + z^2 - 2x^2 = 0,$$

или

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - x^2 = 0,$$

откуда видно, что это круговой конус, у которого ось совпадает с осью Ox.

6) Переписав уравнение в виде

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{\frac{12}{5}},$$

можем заключить, что это эллиптический параболоид (20, 17).

7) Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

8) Уравнение содержит две координаты. Это цилиндрическая поверхность. Перепишем уравнение в виде

$$z^2 = 4x \qquad \text{(парабола)}.$$

Уравнение определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy.

9) Уравнение перепишем в виде

$$y = \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{6}.$$

Из сравнения с (20, 20) заключаем, что это гиперболический параболоид.

10) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=1,$$

или

$$\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{3}=-1.$$

Из сравнения с (20, 13) заключаем, что это двуполостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Ox.