ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интервал, отрезок, промежуток. Абсолютная величина числа. Свойства абсолютных величин.

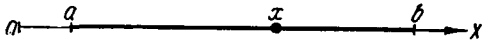
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Интервал, отрезок, промежуток

1. *Если* a и b — *действительные числа* и a *меньше* b $(a < b)$, *то совокупность всех действительных чисел* x, *подчиняющихся условию* $a < x < b$, *образует интервал. Левым концом интервала является число* a, а *правым его концом — число* b. Обозначается интервал символом (a, b).

С геометрической точки зрения интервал (a, b) представляет собой совокупность всех точек прямой, находящихся между точками a и b, причем концы этого отрезка a и b в интервал не включаются.

На фиг. 1,1 представлен интервал. Стрелки показывают, что точки a и b не принадлежат интервалу (a, b).



Фиг. 1,1.

2. *Если к интервалу* (a, b) *присоединить числа* a и b, *то получим отрезок* ab, *который обозначается символом* $[a, b]$. Таким образом, под отрезком $[a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a \leqslant x \leqslant b$.

Геометрически отрезок $[a, b]$ есть отрезок прямой с концами в точках a и b.

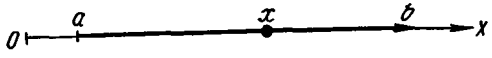
Различие между интервалом (a, b) и отрезком $[a, b]$ состоит в том, что в случае интервала (a, b) числа a и b ему не принадлежат, а в случае отрезка $[a, b]$ числа a и b ему принадлежат.

На фиг. 1,2 представлен отрезок $[a, b]$.

Фиг. 1,2.

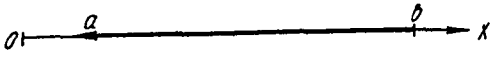
3. *Под символом* $[a, b)$ *следует понимать совокупность всех действительных чисел* x, *подчиняющихся условию* $a \leqslant x < b$, *т. е. рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами* a *и* b, *причем число* a *рассматривается, а число* b — *нет (фиг. 1,3).*

Под символом же $(a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a < x \leqslant b$, т. е.



Фиг. 1,3.

рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами a и b, причем число a не рассматривается, а число b рассматривается (фиг. 1,4).



Фиг. 1,4.

Каждая из совокупностей чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ называется полуотрезком*.

4. *В том случае, когда безразлично, принадлежат ли граничные точки* a *и* b *рассматриваемым совокупностям или нет, вместо терминов «интервал» и «отрезок» употребляется термин «промежуток».*

Пример 1. Интервал (5,9) есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $5 < x < 9$.

Пример 2. Отрезок $[-1, +2]$ есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant +2$.

Пример 3. Совокупность всех действительных чисел x, для которых $-1 \leqslant x < 1$, есть полуотрезок $[-1,1)$.

Пример 4. Совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $-2 < x \leqslant 2$, есть полуотрезок $(-2, +2]$.

5. *Если рассматривается совокупность всех действительных чисел, то это записывается так:* $-\infty < x < +\infty$ *или* $(-\infty, +\infty)$.

Под записью $a < x < +\infty$ *или* $(a, +\infty)$ *следует понимать, что рассматривается совокупность всех действительных чисел* x, *бо́льших, чем* a, *а под записью* $a \leqslant x < +\infty$, *или* $[a, +\infty)$, *понимается совокупность всех действительных чисел* x, *не меньших* a (*когда мы говорим «число, не меньшее числа* a», *то это значит, что это число или больше, или равно* a).

---

* Некоторые авторы, например Г. П. Толстов в учебнике «Курс математического анализа», называют эти совокупности чисел не «полуотрезками», а «полуинтервалами».

Запись $-\infty < x < b$ *или* $(-\infty, b)$ *означает, что рассматриваются все действительные числа* x, *меньше числа* b, *а запись* $-\infty < x \leqslant b$ *или* $(-\infty, b]$ *следует понимать так, что рассматривается совокупность всех действительных чисел* x, *не больших числа* b (когда говорят, что число не больше числа b, то это означает, что оно или меньше, или равно числу b). *Интервалы, рассмотренные в этом пункте, называются бесконечными.*

2. Свойства абсолютных величин

С абсолютными величинами чисел в математическом анализе приходится часто встречаться. Мы напомним относящиеся сюда определения и теоремы и сделаем ряд упражнений.

1. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$.

Пусть a — действительное число. Если оно положительно или равно нулю ($a \geqslant 0$), то его абсолютной величиной называется оно само, а если оно отрицательно ($a < 0$), то его абсолютной величиной называется число $-a$.

Итак, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$.

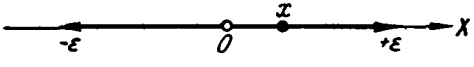
Чтобы перейти к абсолютной величине числа, имеющего в цифровой записи знак минус, надо этот знак отбросить.

Если $a = 5$, то $|a| = |5| = 5$; если $a = 0$, то $|a| = 0$.

Если $a = -3$, то $|a| = |-3| = -(-3) = 3$.

2. Если $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то это означает, что x удовлетворяет неравенствам (фиг. 1,5)

$$-\varepsilon < x < +\varepsilon. \tag{1,1}$$

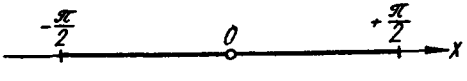


Фиг. 1,5.

Пример 1. Если $|a| < 3$, то имеют место неравенства

$$-3 < a < +3.$$

Пример 2. Если $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то y удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (фиг. 1,6).



Фиг. 1,6.

Задача 1,1. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right|$ при $x = 2$.

Решение. При $x = 2$

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right| = \left|\frac{2\cdot 2+5}{7-2\cdot 2^2}\right| = \left|\frac{4+5}{7-8}\right| = \left|\frac{9}{-1}\right| = |-9| = 9.$$

Задача 1,2. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right|$ при $x = 0$.

Решение. При $x = 0$ имеем

$$\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right| = \left|\frac{2\cdot 0-4}{5-0}\right| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \left|-\frac{4}{5}\right| = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Задача 1,3 (для самостоятельного решения). Определить при $x = 4$ числовую величину выражения $\left|\frac{x-8}{5-x^2}\right|$.

Ответ. $\frac{4}{11}$.

Задача 1.4 (для самостоятельного решения). Найти числовую величину выражения $\left|\frac{5-x^3}{1-x}\right|$ при: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = -3$.

Ответ. 1) 5; 2) 3; 3) 8.

Задача 1,5. Определить, при каких значениях x будет справедливо неравенство $|x-3| < 2$.

Решение. Согласно формуле (1,1) данное неравенство может быть записано так: $-2 < x-3 < 2$. К каждой части этих неравенств прибавим по 3 и получим $-2+3 < x < 2+3$, откуда следует, что $1 < x < 5$.

Заключение: неравенство $|x-3| < 2$ выполняется для всех значений x из интервала (1,5).

Задача 1,6. Определить, при каких значениях x выполняется неравенство $|x-a| < \varepsilon$.

Решение. Поступая так же, как и в предыдущей задаче, получаем, что $-\varepsilon < x-a < +\varepsilon$, а отсюда, прибавляя a к каждой части этих неравенств, имеем $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

Заключение: неравенство $|x-a| < \varepsilon$ выполняется для всех значений x из интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Определить, при каких значениях x выполняются неравенства: 1) $|x-1| < 3$; 2) $|x+3| < 1$; 3) $|x+1| > 3$.

Ответ. 1) $-2 < x < 4$; 2) $-4 < x < -2$; 3) $x < -4$ и $x > 2$.

Указание к третьему примеру: из того, что $|x| > (a > 0)$, следует, что $x > +a$ и $x < -a$. В нашем случае из того, что $|x+1| > 3$, заключаем, что $x+1 > 3$ и $x+1 < -3$; отсюда и следует указанный ответ.

Задача 1,8. При каких значениях x корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения?

Решение. Корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения, если подкоренное выражение не является отрицательным, т. е. когда $9-x^2 \geqslant 0$, а $x^2 \leqslant 9$.

Многие совершают грубую ошибку, делая на основании неравенства $x^2 < 9$ заключение, что $x < \pm 3$, т. е. $x < +3$ и $x < -3$. В действительности же верно только, что $x < +3$, а неравенство $x < -3$ является в данном случае ошибочным. Правильными решениями неравенства $x^2 < 9$ являются $x > -3$ и $x < +3$, т. е. $-3 < x < +3$, или $|x| < 3$, ибо для всех значений x из интервала $(-3, +3)$ выполняется неравенство $x^2 < 9$. Если же принять, что $x < -3$, то числа, удовлетворяющие этому неравенству, будучи возведены в квадрат, дадут числа бо́льшие, чем 9 (например, $-4 < -3$ и $(-4)^2 = 16 > 9$).

Итак, решением неравенства $x^2 \leqslant 9$ является $-3 \leqslant x \leqslant +3$, или $|x| \leqslant 3$.

Задача 1,9 (для самостоятельного решения). При каких значениях x корень $\sqrt{x^2-9}$ будет иметь действительные значения?

Ответ. $x \leqslant -3$ и $x \geqslant +3$, т. е. $\sqrt{x^2-9}$ имеет действительные значения для значений x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x \leqslant -3$ и $3 \leqslant x + \infty$.

3. Теоремы об абсолютных величинах

Теорема 1. *Абсолютная величина суммы нескольких слагаемых не больше суммы абсолютных величин этих слагаемых, т. е. например,* $|x+y+z| \leqslant |x|+|y|+|z|$, *причем знак равенства имеет место только в том случае, когда числа* x, y *и* z *имеют один и тот же знак.*

Теорема 2. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е.* $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

Теорема 3. *Абсолютная величина произведения нескольких сомножителей равна произведению абсолютных величин этих сомножителей. Например, в случае двух сомножителей* $|xy| = |x||y|$.

Теорема 4. *Абсолютная величина дроби равна абсолютной величине числителя, разделенной на абсолютную величину знаменателя,* т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

Задача 1,10 (для самостоятельного решения). Проверить теорему 1 этого параграфа для

1) $x = -5$; $y = 4$; $z = 5$; $u = -1$.
2) $x = -4$; $y = 5$; $z = -2$.
3) $x = 4$; $y = 2$; $z = 7$.
4) $x = 5$; $y = -3$; $z = -6$.

Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Проверить теорему *2* этого параграфа для чисел

$$1)\ x = 7;\quad y = -4;\quad 3)\ x = 5;\quad y = 7;$$
$$2)\ x = -4;\quad y = -8;\quad 4)\ x = -10;\quad y = 4;$$

Задача 1,12. Решить неравенство $\left|\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5}\right| < 0{,}01\ (x > -3)$.

Решение. Упростим выражение, стоящее под знаком абсолютной величины:

$$\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5} = \frac{5x-5-2x-6}{10(x+3)} = \frac{3x-11}{10(x+3)},$$

и данное неравенство запишется в виде $\left|\frac{3x-11}{10(x+3)}\right| < \frac{1}{100}$.

Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем:

$$-\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)} < +\frac{1}{100},$$

а отсюда уже имеем два неравенства:

$$1)\ -\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)};\quad 2)\ \frac{3x-11}{10(x+3)} < \frac{1}{100}.$$

Так как по условию $x > -3$, то $x + 3$ — величина положительная, и первое неравенство после умножения обеих его частей на $x + 3$ дает

$$-1 \cdot (x+3) < 30x - 110;\quad -x - 3 < 30x - 110;\quad x > \frac{107}{31}$$

($x + 3 > 0$, а поэтому смысл неравенства от умножения обеих его частей на $x + 3$ сохраняется).

Из второго неравенства получаем, что $x < \frac{113}{29}$. Итак, данное неравенство выполняется, если $\frac{107}{31} < x < \frac{113}{29}$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Величины постоянные и переменные. Функция. Область существовании функции. Основные элементарные функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Постоянные величины. Абсолютные постоянные и параметры. *Величина называется постоянной, если она всегда или только в условиях данной задачи сохраняет одно и то же числовое значение.*

Постоянные величины разделяются на абсолютные постоянные величины и параметры. Величина, которая сохраняет одно