Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Проверить теорему *2* этого параграфа для чисел

$$1)\ x = 7;\quad y = -4;\quad 3)\ x = 5;\quad y = 7;$$
$$2)\ x = -4;\quad y = -8;\quad 4)\ x = -10;\quad y = 4;$$

Задача 1,12. Решить неравенство $\left|\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5}\right| < 0{,}01\ (x > -3)$.

Решение. Упростим выражение, стоящее под знаком абсолютной величины:

$$\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5} = \frac{5x-5-2x-6}{10(x+3)} = \frac{3x-11}{10(x+3)},$$

и данное неравенство запишется в виде $\left|\frac{3x-11}{10(x+3)}\right| < \frac{1}{100}$.

Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем:

$$-\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)} < +\frac{1}{100},$$

а отсюда уже имеем два неравенства:

$$1)\ -\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)};\quad 2)\ \frac{3x-11}{10(x+3)} < \frac{1}{100}.$$

Так как по условию $x > -3$, то $x + 3$ — величина положительная, и первое неравенство после умножения обеих его частей на $x + 3$ дает

$$-1 \cdot (x+3) < 30x - 110;\quad -x - 3 < 30x - 110;\quad x > \frac{107}{31}$$

($x + 3 > 0$, а поэтому смысл неравенства от умножения обеих его частей на $x + 3$ сохраняется).

Из второго неравенства получаем, что $x < \frac{113}{29}$. Итак, данное неравенство выполняется, если $\frac{107}{31} < x < \frac{113}{29}$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Величины постоянные и переменные. Функция. Область существовании функции. Основные элементарные функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Постоянные величины. Абсолютные постоянные и параметры. *Величина называется постоянной, если она всегда или только в условиях данной задачи сохраняет одно и то же числовое значение.*

Постоянные величины разделяются на абсолютные постоянные величины и параметры. Величина, которая сохраняет одно

и то же значение при всех условиях, называется абсолютной постоянной (примерами абсолютных постоянных являются: все числа, сумма внутренних углов треугольника, число π; скорость света в пустоте).

Параметром называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи (данного исследования) сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя опять-таки определенное числовое значение.

2. Переменные величины. *Величина называется переменной, если она в условиях данной задачи принимает различные числовые значения.*

3. Независимые переменные. *Две переменные величины называются независимыми, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от значений, принимаемых другой.*

(Пример: в формуле для определения объема цилиндра $V = \pi R^2 H$ величины R и H — независимые переменные, так как значения, принимаемые высотой H цилиндра, не зависят от значений R, которые принимает радиус цилиндра).

4. Функция. *Переменная величина y называется функцией от переменной величины x, если каждому рассматриваемому значению x по известному правилу или закону соответствует одно определенное значение y*. Если переменная величина y является функцией переменной величины x, то это обозначают так:*

$$y = f(x). \tag{2,1}$$

Эта запись читается: «игрек есть функция от икс», или «игрек равен эф от икс».

В записи (2,1) x называется аргументом или независимой переменной, а y — функцией, или зависимой переменной.

5. Задание функции. *Функция (2,1) считается заданной, если:*

1) Указана совокупность всех рассматриваемых значений аргумента x.

2) Указан закон, который позволяет по заданному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

6. Частным значением функции *называется то ее значение, которое соответствует частному значению аргумента $x = x_0$. Для обозначения частного значения функции при $x = x_0$ употребляется символ $f(x_0)$ или $y(x_0)$.*

7. Область существования функции. *Если функция задана аналитически, то областью существования функции (иначе, областью определения функции) называется совокупность тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.*

---

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

ПЕРЕМЕННЫЕ И ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Задача 2,1. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

Какие из величин, входящих в эту формулу, являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 и π — абсолютные постоянные; g — параметр; значение этой величины постоянно только в данной точке земной поверхности, но изменяется при переходе от одной точки земной поверхности к другой; l и T — величины переменные.

Задача 2,2. Согласно закону Бойля-Мариотта, в изометрическом процессе $pV = C$, где p — давление газа, а V — занимаемый им объем. Указать в этой формуле переменные величины и параметр.

Ответ. Величины p и V — переменные; величина C — параметр, так как она сохраняет постоянное значение только для данного газа и для данной температуры.

Задача 2,3. В случае свободного падения тела в пустоте пройденный им путь S вычисляется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$.

Какие из входящих в эту формулу величин являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 является абсолютной постоянной величиной (следует помнить, что все числа — абсолютные постоянные величины); g — параметр (см. задачу № 2,1); s и t — переменные величины.

Задача 2,4. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Указать, какие из величин, входящих в эту формулу, являются переменными, абсолютными постоянными, параметрами.

Ответ. Величины π и 3 — абсолютные постоянные; V, H, R и r — переменные величины.

Ни одна из величин, входящих в эту формулу, не является параметром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для того чтобы найти частное значение функции по заданному частному значению аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента его частное значение.

Задача 2,5. Дана целая рациональная функция $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Вычислить: 1) $f(2)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(1)$; 4) $f(0)$; 5) $f(a+2)$; 6) $f(-x)$.

Решение. 1) $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 4 - 4 - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$.

2) $f(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 1 = 3 \cdot 4 + 4 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$.

3) $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = 0$.

4) $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$.

5) $f(a+2) = 3(a+2)^2 - 2(a+2) - 1 = 3(a^2 + 4a + 4) - 2a - 4 - 1 = 3a^2 + 10a + 7$.

6) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) - 1 = 3x^2 + 2x - 1$.

Задача 2, 6 (для самостоятельного решения). Дана целая рациональная функция $f(z) = 2z^3 - z^2 + z - 1$.

Вычислить: 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-1)$;

4) $f\left(\frac{a}{2}\right)$; 5) $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 13; 3) -5; 4) $\frac{a^3 - a^2 + 2a - 4}{4}$;

5) $\frac{a^3 - 7a^2 + 3a - 5}{(a+1)^3}$.

Задача 2,7. Дана дробная рациональная функция

$$f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 5}.$$

Вычислить: 1) $f(a)$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)$; 3) $f(2)$; 4) $f(0)$.

Решение. 1) $f(a) = \frac{4a^2 - 7a + 2}{3a^2 + 5}$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{a^2}\right) + 2}{3\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + 5} =$

$= \frac{4 - 7a^2 + 2a^4}{5a^4 + 3}$; 3) $f(2) = \frac{4 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2}{3 \cdot 2^2 + 5} = \frac{16 - 14 + 2}{12 + 5} = \frac{4}{17}$;

4) $f(0) = \frac{2}{5}$.

Задача 2, 8 (для самостоятельного решения). Дана функция $f(z) = 5^{\frac{1}{z} - 1}$. Вычислить: 1) $f(1)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Ответ. 1) $f(1) = 1$; 2) $f(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $f(-2) = \frac{1}{5\sqrt{5}}$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right) = 5^{z-1}$.

Задача 2, 9. Дана дробно-линейная функция $\varphi(x) = \frac{5x + 1}{2 - x}$.

Найти: 1) $\varphi(3x)$; 2) $\varphi(x^3)$; 3) $3\varphi(x)$; 4) $[\varphi(x)]^3$.

Решение. 1) Чтобы найти $\varphi(3x)$ следует в выражении для $\varphi(x)$ заменить x на $3x$. Получаем $\varphi(3x) = \frac{5 \cdot 3x + 1}{2 - 3x} = \frac{15x + 1}{2 - 3x}$.

2) Заменяя в выражении для $\varphi(x)$ x на x^3, получим

$$\varphi(x^3) = \frac{5x^3+1}{2-x^3}.$$

3) Следует отличать $\varphi(3x)$ от $3\varphi(x)$, $\varphi(x^3)$ от $[\varphi(x)]^3$. Было найдено в 1), что $\varphi(3x) = \frac{15x+1}{2-3x}$, а $3\varphi(x) = 3\,\frac{5x+1}{2-x} = \frac{15x+3}{2-x}$.

4) $[\varphi(x)]^3 = \left(\frac{5x+1}{2-x}\right)^3 = \frac{125x^3+75x^2+15x+1}{8-12x+6x^2-x^3}$.

Задача 2, 10 (для самостоятельного решения). Дана функция $\Phi(\theta) = \lg\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Найти:

$$1)\ \Phi(2\theta);\ 2)\ 2\Phi(\theta);\ 3)\ \Phi(\theta^2);\ 4)\ [\Phi(\theta)]^2.$$

Ответ. 1) $\Phi(2\theta) = \lg\frac{5-2\theta}{2+2\theta}$; 2) $2\Phi(\theta) = \lg\left(\frac{5-\theta}{2+\theta}\right)^2$;

3) $\Phi(\theta^2) = \lg\frac{0-\theta^2}{2+\theta^2}$; 4) $[\Phi(\theta)]^2 = \lg^2\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Задача 2, 11 (для самостоятельного решения). $\varphi(x) = \lg\sin x$. Доказать, что $\varphi(a) + \varphi(b) = \lg(\sin a\cdot\sin b)$.

Задача 2,12 (для самостоятельного решения). $F(x) = \sin x$. Доказать, что $F(3x) = 3F(x) - 4[F(x)]^3$.

Задача 2, 13. Доказать, что если $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, то $f(-x) = -f(x)$.

Решение. $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{f(x)} = -f(x)$.

Задача 2, 14 (для самостоятельного решения). $f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Доказать, что $f(2\alpha) = \frac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$.

Задача 2, 15 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, то $f(-x) = f(x)$.

Задача 2, 16. Вычислить $f(x) = \frac{36}{x^2} + x^2$ в точках, где $\frac{6}{x} + x = 5$.

Решение. $\frac{36}{x^2} + x^2 = \left(\frac{6}{x} + x\right)^2 - 12$, а так как по условию $\frac{6}{x} + x = 5$, то $\frac{36}{x^2} + x^2 = 5^2 - 12 = 13$.

Задача 2, 17. Дано, что $\varphi(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Доказать, что $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$.

Решение. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2=$ $=\varphi(x)$.

Задача 2, 18 (для самостоятельного решения). Дана функция $\varphi(x)=\frac{7-x^2}{5-x+x^2}$. Вычислить: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}$.

Ответ. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{7x^2-1}{5x^2-x+1}$; $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{5-x+x^2}{7-x^2}$.

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Задача 2, 19. Найти область существования функции

$$\varphi=3x^3+5x^2-7x+2.$$

Решение. Заданная функция — целая рациональная функция. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<+\infty$.

Задача 2, 20. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{1}{x};\quad 2)\ y=\frac{5}{1-x};\quad 3)\ y=\frac{1}{7x-2}.$$

Решение. 1) Функция $y=\frac{1}{x}$ — дробная рациональная функция. Она существует при всех значениях независимой переменной x, кроме тех, которые обращают в нуль ее знаменатель, т. е. в данном случае кроме $x=0$. Область существования этой функции состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$.

2) Функция $y=\frac{5}{1-x}$ также определена при всех значениях x, кроме того его значения, при котором $1-x=0$, т. е. кроме $x=1$. Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$, или в другой записи $(-\infty<x<1)$; $(1<x<+\infty)$.

3) Решив уравнение $7x-2=0$, найдем, что $x=\frac{2}{7}$. Область существования функции $y=\frac{1}{7x-2}$ состоит из двух бесконечных интервалов $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$; $\left(\frac{2}{7}, +\infty\right)$, или в другой записи $\left(-\infty<x<\frac{2}{7}\right)$ и $\left(\frac{2}{7}<x<+\infty\right)$.

Задача 2, 21 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x-1}{x+1};\quad 2)\ y=\frac{x^2-1}{2x-4}.$$

Ответ. 1) $(-\infty,\ -1)$; $(-1,\ +\infty)$, или $-\infty<x<-1$ и $-1<x<+\infty$.
2) $(-\infty,\ 2)$; $(2,\ +\infty)$,
или $-\infty<x<2$ и $2<x<+\infty$.

Задача 2, 22. Найти область существования функции $y=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$.

Решение. Заданная функция — дробная рациональная функция. Она определена при всех действительных значениях x, кроме тех, при которых знаменатель дроби $x^2-7x+12$ равен нулю, т. е. кроме значений $x=3$ и $x=4$ (эти значения найдены из уравнения $x^2-7x+12=0$). Область существования заданной функции состоит из трех интервалов: $(-\infty,\ 3)$; $(3,4)$ и $(4,\ +\infty)$, или в другой записи: $-\infty<x<3$; $3<x<4$; $4<x<+\infty$.

Задача 2,23 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{5x^2-7x+12}{x^2-1};\quad y=\frac{7x^2+x-1}{3x^2-8x+4}.$$

Ответ. Область существования состоит из трех интервалов:

$$(-\infty,\ -1);\ (-1,\ +1);\ (+1,\ +\infty).$$

2) Область существования состоит из трех интервалов:

$$\left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3},\ 2\right);\ (2,\ +\infty).$$

Задача 2. 24. Найти область существования функции $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

Решение. Приравняв нулю знаменатель дроби x^2+x+1 и решив квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, убедимся, что его корни — комплексные числа: $x=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Но при одном действительном значении x многочлен x^2+x+1 в нуль не обращается. Поэтому заданная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$.

Задача 2, 25 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x^3-x+2}{2x^2+x+5};\quad 2)\ y=\frac{5}{x^2+1}.$$

Ответ. 1) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.
2) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Задача 2, 26 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = -\frac{x+x}{x^2-1}.$$

(знаменатель дроби x^3-1 имеет один действительный корень $x=1$);

$$2)\ y = \frac{2x^3-1}{x^3+1}.$$

Ответ. 1) Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, +1)$ и $(+1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=1$. 2 Знаменатель дроби x^3+1 имеет один действительный корень $x=-1$. Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=-1$.

Задача 2, 27. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\sqrt{2-x};\ 2)\ y=\sqrt{x+4}.$$

Решение. 1) Для того чтобы функция y принимала только действительные значения, величина $2-x$, стоящая под корнем, не должна принимать отрицательных значений, т. е. должно быть $2-x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 2$. Областью существования функции является совокупность действительных значений x, меньших или равных 2, т. е. полуотрезок $-\infty < x \leqslant 2$.

2) Чтобы определить область существования функции, составим неравенство $x+4 \geqslant 0$, из которого получаем, что $x \geqslant -4$. Область существования функции полуотрезок $-4 \leqslant x < +\infty$ $[-4, +\infty)$.

Задача 2, 28 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций 1) $y=\sqrt{5-x}$ и 2) $y=\sqrt{x-3}$.

Ответ. 1) Полуотрезок $-\infty < x \leqslant 5$.
2) Полуотрезок $3 \leqslant x < +\infty$.

Задача 2, 29. Найти область существования функций

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{x-2}};\ 2)\ y=\frac{5}{\sqrt{4-x}};\ 3)\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}.$$

Решение. 1) Выражение $\sqrt{x-2}$ принимает действительные значения, когда $x-2 \geqslant 0$, т. е. когда $x \geqslant 2$. Но при $x=2$ имеем $x-2=0$, знаменатель дроби обращается в нуль, дробь теряет числовой смысл, а потому значение $x=2$ не может входить в область существования функции. Значит, функция существует при значениях $x>2$, область существования представляет собой бесконечный интервал $(2, +\infty)$.

2) Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, 4)$.

3) Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 8)$ и $(8, +\infty)$. Это же заключение можно записать с помощью неравенств: $-\infty < x < 8$ и $8 < x < +\infty$.

Задача 2, 30 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}};\quad 2)\ y = \frac{1}{\sqrt{7-2x}};\quad 3)\ y = \frac{4}{\sqrt{x-5}}.$$

Ответ. 1) Два бесконечных интервала $(-\infty, 3)$; $(3, +\infty)$.
2) Бесконечный интервал $(-\infty; 3{,}5)$.
Бесконечный интервал $(5, +\infty)$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Продолжение упражнений в определении области существования функции.

Задача 3, 1. Найти область существования функций 1) $y = \sqrt{x^2-1}$; 2) $y = \sqrt{4-x^2}$.

Решение. 1) Для того чтобы функция $y = \sqrt{x^2-1}$ принимала только действительные значения, надо, чтобы $x^2 - 1 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \geqslant 1$. Это неравенство выполняется тогда, когда $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, и, таким образом, область существования функции состоит из двух полуотрезков: $(-\infty, -1]$ и $[+1, +\infty)$, или в другой записи $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x + \infty$.

2) Должно выполняться неравенство $4 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \leqslant 4$. Отсюда следует, что $x \geqslant -2$ и $x \leqslant +2$.

Областью существования функции является отрезок $[-2, +2]$. Это можно записать иначе: $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

Задача 3, 2 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \sqrt{9-x^2};\quad 2)\ y = \sqrt{x^2-6};\quad 3)\ y = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}};$$

$$4)\ y = \frac{3}{\sqrt{x^2-16}}.$$

Ответ. 1) Отрезок $[-3, +3]$, иначе $-3 \leqslant x \leqslant +3$. 2) Два полуотрезка $(-\infty, -\sqrt{6}]$ и $[+\sqrt{6}, +\infty)$, иначе $-\infty < x \leqslant -\sqrt{6}$ и $+\sqrt{6} \leqslant x < +\infty$. 3) Интервал $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, или $(-\sqrt{5} < x < \sqrt{5})$ (значения $x = \pm\sqrt{5}$ отбрасываются, так как при $x = +\sqrt{5}$ знаменатель дроби обращается в нуль и дробь теряет числовой смысл). 4) Два интервала $(-\infty, -4)$ и $(4, +\infty)$, или $-\infty < x < -4$ и $4 < x < +\infty$ (значения $x = \pm 4$