2) Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, 4)$.

3) Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 8)$ и $(8, +\infty)$. Это же заключение можно записать с помощью неравенств: $-\infty < x < 8$ и $8 < x < +\infty$.

Задача 2, 30 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}};\quad 2)\ y = \frac{1}{\sqrt{7-2x}};\quad 3)\ y = \frac{4}{\sqrt{x-5}}.$$

Ответ. 1) Два бесконечных интервала $(-\infty, 3)$; $(3, +\infty)$.
2) Бесконечный интервал $(-\infty; 3{,}5)$.
Бесконечный интервал $(5, +\infty)$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Продолжение упражнений в определении области существования функции.

Задача 3, 1. Найти область существования функций 1) $y = \sqrt{x^2-1}$; 2) $y = \sqrt{4-x^2}$.

Решение. 1) Для того чтобы функция $y = \sqrt{x^2-1}$ принимала только действительные значения, надо, чтобы $x^2 - 1 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \geqslant 1$. Это неравенство выполняется тогда, когда $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, и, таким образом, область существования функции состоит из двух полуотрезков: $(-\infty, -1]$ и $[+1, +\infty)$, или в другой записи $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x + \infty$.

2) Должно выполняться неравенство $4 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \leqslant 4$. Отсюда следует, что $x \geqslant -2$ и $x \leqslant +2$.

Областью существования функции является отрезок $[-2, +2]$. Это можно записать иначе: $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

Задача 3, 2 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \sqrt{9-x^2};\quad 2)\ y = \sqrt{x^2-6};\quad 3)\ y = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}};$$

$$4)\ y = \frac{3}{\sqrt{x^2-16}}.$$

Ответ. 1) Отрезок $[-3, +3]$, иначе $-3 \leqslant x \leqslant +3$. 2) Два полуотрезка $(-\infty, -\sqrt{6}]$ и $[+\sqrt{6}, +\infty)$, иначе $-\infty < x \leqslant -\sqrt{6}$ и $+\sqrt{6} \leqslant x < +\infty$. 3) Интервал $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, или $(-\sqrt{5} < x < \sqrt{5})$ (значения $x = \pm\sqrt{5}$ отбрасываются, так как при $x = +\sqrt{5}$ знаменатель дроби обращается в нуль и дробь теряет числовой смысл). 4) Два интервала $(-\infty, -4)$ и $(4, +\infty)$, или $-\infty < x < -4$ и $4 < x < +\infty$ (значения $x = \pm 4$

отбрасываются, так как при $x = \pm 4$ знаменатель дроби обращается в нуль и тем самым дробь теряет числовой смысл).

Задача 3, 3 (для самостоятельного решения). Определить область существования функции $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Указание. Должно выполняться неравенство $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$. Для определения тех значений x, при которых это имеет место следует решить системы неравенств:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x+1 \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \quad \text{и } 2)\ \left.\begin{array}{l} x+1 \leqslant 0 \\ x-1 < 0 \end{array}\right\}.$$

Из решения этих неравенств следует, что областью существования является полуотрезок $(-\infty, -1)$ и интервал $(1, +\infty)$. Это можно записать иначе: $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 < x < +\infty$. Значение $x = 1$ рассматриваться не может, так как тогда $x - 1 = 0$ и дробь $\frac{x+1}{x-1}$ теряет числовой смысл.

Задача 3, 4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$.

Указание. Рассмотреть неравенство $(x-2)(x+3) \geqslant 0$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Задача 3, 5. Найти область существования функции $y = \lg(x - 5)$.

Решение. Учитывая, что если основание логарифмов положительно, то ни нуль, ни отрицательные числа логарифмов не имеют, область существования данной функции найдем из требования, чтобы $x - 5 > 0$, откуда следует, что должно быть $x > 5$. Функция существует для значений $5 < x < +\infty$, т. е. на бесконечном интервале $(5, +\infty)$.

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \lg(2 - x);\ 2)\ y = \lg(x^2 - 3).$$

Ответ. 1) $-\infty < x < 2$; 2) $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$.

Указание. В случае 2) рассмотреть неравенство $x^2 - 3 > 0$.

Задача 3, 7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg x^2$.

Ответ. $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$, т. е. функция определена при любом значении x, кроме $x = 0$.

Задача 3,8. Найти область существования функции $y = \sin(2x + 3)$.

Решение. Функция $y = \sin x$ определена при любом значении аргумента x. Значит, выражение $2x + 3$, стоящее под знаком синуса, может принимать любое значение, откуда следует, что

x может принимать любое значение. Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Это заключение можно написать и иначе: $-\infty < x < +\infty$.

Задача 3, 9 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sin \frac{1}{x}$.

Ответ. Все действительные числа, кроме $x = 0$: $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$.

Задача 3, 10. Найти область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Значит, в нашем случае величина $2x$, стоящая после знака тангенса, не должна быть равна $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. $2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, а $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Таким образом, область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$ состоит из всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число.

Задача 3, 11 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; 2) $\operatorname{tg} 4x$; 3) $y = \sec \frac{x}{5}$ и $y = \operatorname{cosec} 3x$.

Ответ. 1) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = 3k\pi$. 2) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$. 3) Множество всех действительных чисел, кроме $x = (2k+1)\frac{5\pi}{2}$. 4) Множество всех действительных чисел кроме $x = \frac{k\pi}{3}$ (всюду k — любое целое число).

Задача 3, 12. Найти область существования функции $y = \arcsin(5x - 8)$.

Решение. Областью существования функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1, +1]$. Поэтому область существования данной функции указывается неравенствами $-1 \leqslant 5x - 8 \leqslant +1$.

Прибавляя ко всем частям этих неравенств по 8, получаем $7 \leqslant 5x \leqslant 9$, откуда уже следует, что функция существует для значений $\frac{7}{5} \leqslant x \leqslant \frac{9}{5}$.

Задача 3, 13 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right);\quad 2)\ y = \arccos(3x - 6).$$

Ответ. 1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Задача 3, 14 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \operatorname{arctg}(2x-5);\quad 2)\ y = \arcsin\sqrt{4x-3}.$$

Ответ. 1) $-\infty < x < +\infty$; 2) $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

Задача 3, 15 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \arcsin(x^2+2)$.

Ответ. Даиное аналитическое выражение не определяет никакой функции, так как ни при одном значении x не имеют место неравенства $-1 \leqslant x^2+2 \leqslant +1$.

Указание к решению задач 3, 16—3, 23.

Если требуется найти область существования алгебраической суммы нескольких функций, то надо поступить так:

1) Определить область существования каждой из слагаемых функций:

2) Определить часть, общую для всех найденных областей. Эта общая часть и будет искомой.

Если такой общей части у областей, найденных в п. 1), не окажется, то заданное аналитическое выражение, представляющее алгебраическую сумму нескольких функций, не определяет никакой функции в области действительных чисел.

Это указание распространяется также на произведение нескольких функций и на частное двух функций, причем при определении области существования частного двух функций должны быть исключены точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль.

Задача 3, 16. Найти область существования функции $y = \log_2(x-1) + x^2$.

Решение. Областью существования функции $y_1 = \log_2(x-1)$ является совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x-1>0$, т. е. интервал $(1, +\infty)$.

Областью существования степенной функции $y_2 = x^2$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

Общей частью этих двух интервалов является интервал $(1, +\infty)$. Таким образом, данная функция существует для значений $1 < x < +\infty$.

Задача 3, 17. Найти область существования функции $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$.

Решение. Функция $y_1 = \sqrt{5-x}$ существует для значений $-\infty < x \leqslant 5$. Функция $y_2 = \sqrt{x+3}$ существует для значений $-3 \leqslant x < +\infty$.

Общей частью найденных двух областей является отрезок $[-3, +5]$, а поэтому данная функция существует для значений $-3 \leqslant x \leqslant +5$.

Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2}$.

Ответ. $-2 \leqslant x \leqslant 4$, т. е. отрезок $[-2,4]$.

Задача 3, 19 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}$.

Ответ. $[-2,15]$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 15$.

Задача 3, 20 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2x^3 + \lg(x-1) + \frac{1}{x-3}$.

Ответ. Функция существует для значений $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$, т. е. в интервалах $(1,3)$ и $(3, +\infty)$.

Задача 3, 21 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2^x \operatorname{tg} x$.

Ответ. Функция существует при всех значениях x, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

Задача 3, 22. Найти область существования функции $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

Решение. Функция $y_1 = \sin x$ существует в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Функция $y = \lg(x^2-4)$ существует в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Но следует иметь в виду, что функция $\lg(x^2-4)$ стоит в знаменателе дроби, а потому из этих двух интервалов надо исключить точки, в которых эта функция обращается в нуль, т. е. точки, для которых $\lg(x^2-4) = 0$, или $x^2-4 = 1$, а $x = \pm\sqrt{5}$. Таким образом, функцию $\lg(x^2-4)$ следует рассматривать в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$ и 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Общей частью, принадлежащей бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, в котором определена функция $\sin x$, и только что найденным интервалам являются именно эти интервалы, а потому данная функция существует в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Задача 3. 23 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

Ответ. Два бесконечных интервала: $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций.

Это практическое занятие посвящается упражнениям на построение графиков функций, заданных аналитически.

В инженерной практике с построением графиков функций приходится встречаться очень часто. При изучении таких пред-