Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2}$.

Ответ. $-2 \leqslant x \leqslant 4$, т. е. отрезок $[-2,4]$.

Задача 3, 19 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}$.

Ответ. $[-2,15]$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 15$.

Задача 3, 20 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2x^3 + \lg(x-1) + \frac{1}{x-3}$.

Ответ. Функция существует для значений $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$, т. е. в интервалах $(1,3)$ и $(3, +\infty)$.

Задача 3, 21 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2^x \operatorname{tg} x$.

Ответ. Функция существует при всех значениях x, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

Задача 3, 22. Найти область существования функции $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

Решение. Функция $y_1 = \sin x$ существует в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Функция $y = \lg(x^2-4)$ существует в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Но следует иметь в виду, что функция $\lg(x^2-4)$ стоит в знаменателе дроби, а потому из этих двух интервалов надо исключить точки, в которых эта функция обращается в нуль, т. е. точки, для которых $\lg(x^2-4) = 0$, или $x^2-4 = 1$, а $x = \pm\sqrt{5}$. Таким образом, функцию $\lg(x^2-4)$ следует рассматривать в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$ и 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Общей частью, принадлежащей бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, в котором определена функция $\sin x$, и только что найденным интервалам являются именно эти интервалы, а потому данная функция существует в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Задача 3. 23 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

Ответ. Два бесконечных интервала: $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций.

Это практическое занятие посвящается упражнениям на построение графиков функций, заданных аналитически.

В инженерной практике с построением графиков функций приходится встречаться очень часто. При изучении таких пред-

метов, как сопротивление материалов, теория упругости, гидравлика, электротехника, радиотехника, к построению графиков функций приходится прибегать буквально на каждом шагу.

Поэтому студенту следует с исключительной серьезностью отнестись к этому практическому занятию.

К построению графиков более сложных функций мы еще возвратимся на практическом занятии № 35 и используем для этого уже аппарат дифференциального исчисления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность всех точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента, взятые из области существования функции, а ординаты, соответствующие этим значениям аргумента, — значения функции.*

Согласно этому определению, для построения точного графика функции нам следовало бы построить все точки, принадлежащие графику, а это, как правило, сделать невозможно, так как, вообще говоря, график функции содержит бесконечное множество точек.

Для построения графика функции $y = f(x)$ обычно поступают так: дают аргументу несколько частных значений и пользуясь аналитическим выражением функции, вычисляют соответствующие значения функции. Если, например, взяты значения аргумента $x = x_1$; $x = x_2$; $x = x_3$, ..., $x = x_n$, то соответствующими им значениями функции будут

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ y_3 = f(x_3);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

Эти значения сводят в таблицу такого вида:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

После этого берут прямоугольную систему координат, выбирают масштабную единицу и строят точки

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n).$$

Полученные точки соединяют плавной кривой. Эта кривая дает эскиз графика функции (приближенный график). Прежде чем приступить к составлению таблицы числовых значений функции, очень полезно выяснить вопрос о симметрии графика функции.

Если функцию можно отнести к классу четных или нечетных функций, то построение ее графика значительно облегчится. Приведем относящиеся сюда определения.

Определение 2. *Область существования функции называется симметричной, если вместе с числом x этой области принадлежит и число $-x$* (на геометрическом языке это значит, что

симметричная область существования функции расположена симметрично относительно начала координат).

Определение 3. *Функция $y = f(x)$ называется четной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = f(x). \qquad (4, 1)$$

Таким образом, если функция — четная, то изменение знака у аргумента не меняет значения функции, а потому в случае четной функции каждой точке ее графика с абсциссой x и ординатой y соответствует точка, имеющая абсциссу $-x$ ту же ординату y.

Это приводит к выводу, **что график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy.**

Таким образом, если функция четная, то ее график мы будем строить так:

1) Построим только часть графика этой функции, расположенную справа от оси Oy, т. е. при составлении таблицы числовых значений функции будем давать аргументу только положительные значения и значение, равное нулю, если это значение принадлежит области существования функции.

2) Построим «зеркальное отображение» относительно оси Oy графика, полученного в п. 1).

Определение 4. *Функция $y = f(x)$ называется нечетной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = -f(x). \qquad (4, 2)$$

Таким образом, у нечетной функции изменение на противоположный знака аргумента изменяет на противоположный и знак функции, не изменяя ее абсолютной величины.

Поэтому **график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат**, так как если графику принадлежит точка $A(x, y)$, то ему же принадлежит и точка B, $(-x, -y)$.

Для построения графика нечетной функции надо: 1) построить только ту часть графика, которая расположена справа от оси Oy, т. е. часть, соответствующую положительным значениям аргумента (и значению $x = 0$, если нуль принадлежит области существования функции); 2) построить кривую, симметричную относительно начала координат кривой, построенной в п. 1).

Эти свойства четных и нечетных функций будут использованы при построении графиков функций.

Задачи 4,1—4,12 являются упражнениями, связанными с определениями четной и нечетной функций.

ПРИЕМЫ, ОБЛЕГЧАЮЩИЕ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Укажем приемы, облегчающие построение графика функции в ряде случаев, которые часто встречаются в практике

4,1. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = f(-x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно* Oy.

4,2. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = -f(x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно оси* Ox.

4,3. *Если известен график функции* $y = f(x)$, *то, чтобы построить график функции* $y = f(x + c)$, *надо перенести график функции* $y = f(x)$ *вдоль оси* Ox *на* c *единиц масштаба вправо, если* $c < 0$, *и влево, если* $c > 0$ *(предполагается, что ось* Ox *направлена вправо).*

4,4. *График функции* $y = f(x) + B$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *переносом этого графика на* B *единиц масштаба вверх, если* $B > 0$, *и вниз, если* $B < 0$ *(предполагается, что ось* Oy *направлена вверх).*

4,5. *График функции* $y = Af(x)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *умножением всех его ординат на* A *при сохранении величины соответствующих абсцисс.*

4,6. *График функции* $y = f(kx)$ $(k > 0)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *делением всех абсцисс этого графика на* k, *если* $k > 1$, *и умножением их на* $\frac{1}{k}$, *если* $0 < k < 1$, *при сохранении величин соответствующих ординат.*

Применяя последовательно эти приемы, можно, зная график функции $y = f(x)$ построить график более сложной функции вида

$$y = Af(kx + c) + B.$$

Упражнения, связанные с понятиями четной и нечетной функции.

Задача 4, 1. Доказать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная.

Решение. Вычислим $f(-x)$. Если окажется, что $f(-x) = f(x)$, то из определения 3 будет следовать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная:

$$f(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4 = f(x).$$

Равенство (4, 1) выполняется, а потому заданная функция — четная.

Задача 4, 2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — нечетная.

Решение. Вычислим $f(-x)$ и если окажется, что $f(-x) = -f(x)$, то из определения 4 будет следовать, что заданная функция действительно нечетная:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Задача 4. 3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ — четная.

Задача 4, 4 (для самостоятельного решения). Доказать нечетность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4, 5 (для самостоятельного решения). Доказать четность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4, 6. Выяснить, является ли функция $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ четной или нечетной.

Решение. Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Отсюда заключаем, что изменение знака у аргумента изменило абсолютную величину функции; ни равенство (4, 1), ни равенство (4, 2) не выполняются, а потому данная функция не может быть отнесена ни к числу четных, ни к числу нечетных функций.

Читателю необходимо уяснить, что функция не обязательно должна быть либо четной, либо нечетной.

Задача 4, 7 (для самостоятельного решения). Показать, что функции $f(x) = \sin x + \cos x$ и $\varphi(x) = 2x + 7$ нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям.

Задача 4, 8. Доказать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.

Решение. Пусть $\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, причем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$ (4, 3). Вычислим $\varphi(-x)$: $\varphi(-x) = f_1(-x) \pm f_2(-x)$.

На основании равенств (4, 3) $\varphi(-x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. и требуемое доказано: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Доказанное предложение распространяется на алгебраическую сумму любого конечного числа слагаемых (предполагалось, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4, 9 (для самостоятельного решения). Доказать, что сумма или разность двух нечетных функций есть функция нечетная (предполагается, что функции рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4. 10. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

Решение. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$. Составим их произведение: $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$, и тогда $\varphi(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = \varphi(x)$; тем самым доказано, что произведение двух четных функций — функция четная.

Теперь самостоятельно докажите, что произведение двух нечетных функций есть тоже функция четная.

Задача 4, 11 (для самостоятельного решения). Доказать, что произведение функции четной на нечетную есть функция нечетная.

Задача 4, 12 (для самостоятельного решения). Выяснить, какая из функций 1) $f(x) = x^4 + \sec x$; 2) $y = x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $f(x) = x^2 \cos x$; 4) $f(x) = x \sin x$; 5) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$; 6) $f(x) = x^3 \sin x$; 7) $y = x^5 \sin x$ является четной, а какая нечетной.

Ответ. Функции 1), 2), 3), 4), 6), 7) — четные, 5) — нечетная.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Графики целых рациональных функций

Задача 4, 13. Построить графики функций: 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 4x - 1$; 4) $y = -3x + 1$.

Решение. 1) Данную функцию нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям: $y = (-x) = -3x - 5$.

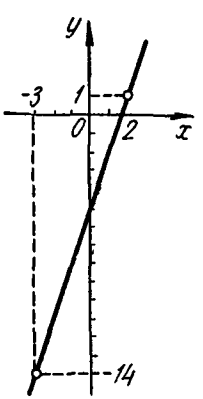
Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция — линейная (это хорошо известно читателю из аналитической геометрии). Ее графиком является прямая линия, для построения которой достаточно знать только две ее точки. Возьмем два произвольных значения аргумента x и вычислим соответствующие им значения функции y.

x	y
2	1
−2	−14

Построим на плоскости точки $A_1(2, 1)$ и $A_2(-3, -14)$.

Прямая изображена на фиг. 4, 1.

Графики остальных функций постройте самостоятельно.



Фиг. 4, 1.

Задача 4, 14. Построить график функции $y = x^2$.

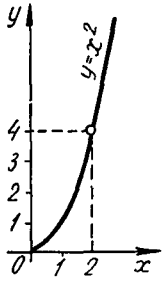
Решение. Заданная функция — четная. Ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить часть графика для значений $x \geqslant 0$, а потом дополнить эту часть ее «зеркальным отображением» относительно оси Oy. Так будет получен полный график этой функции. Так как функция определена при любом значении x, составим таблицу ее значений при произвольных значениях $x \geqslant 0$ и построим на плоскости точки $A_1(0, 0)$; $A_2(1, 1)$; $A_3(2, 4)$; $A_4(3, 9)$.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

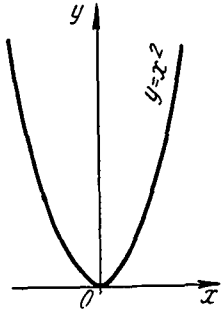
Соединим эти точки плавной кривой (фиг. 4,2).

Построим теперь «зеркальное отображение» этой кривой относительно оси Oy и получим полный приближенный график данной функции (фиг. 4, 3). Очевидно, что графиком функции является парабола.

Задача 4, 15. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: 1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = \frac{1}{3}x^2$; 4) $y = -y^2$; 5) $y = -3x^2$.



Фиг. 4,2.



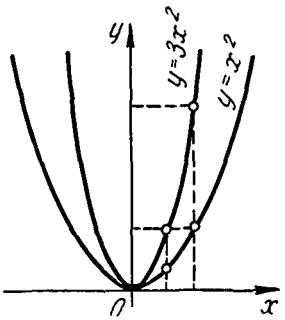
Фиг. 4,3.

Указание. Учесть указание 4, 5 (стр. 25). Пользуясь графиком функции $y = x^2$ (фиг. 4, 3), сохраняя величины абсцисс, в первом случае надо увеличить все ординаты в 3 раза (фиг. 4,4), во втором случае уменьшить все ординаты в 2 раза (фиг. 4,5), в третьем — уменьшить их в 3 раза (фиг. 4, 6). В случаях четвертом и пятом использовать указание 4, 2 стр. 25 (фиг. 4, 7 и 4, 8).

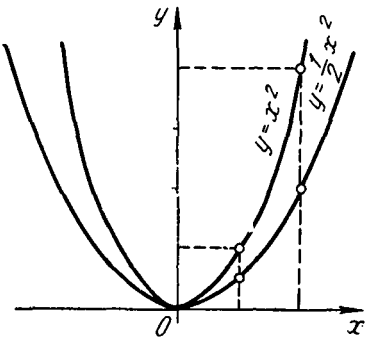
Задача 4, 16 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y = 2x^2$ построить графики функций: $y = 2x^2 + d$ при $d = 1, 2, -1, -3$.

Указание. 1) Построить график функции $y = 2x^2$, использовав график функции $y = x^2$. Учесть указание 4, 4 (стр. 25). Графики этих функций показаны на фиг. 4, 9 — 4, 12.

Например, график функции $y = 2x^2 - 3$ получается из графика функции $y = x^2$ так: увеличив все ординаты этого графика

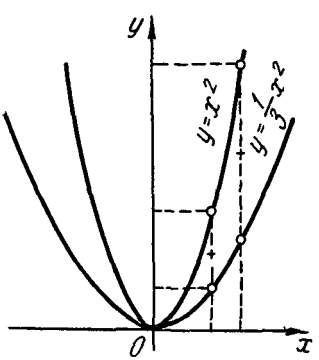


Фиг. 4,4.

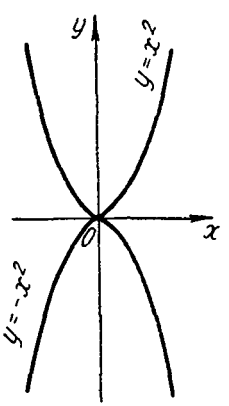


Фиг. 4,5.

в два раза при сохранении величины соответствующих абсцисс, получим график функции $y = 2x^2$. Если этот график опустить на 3 ед. масштаба, то получим график функции $y = 2x^2 - 3$.



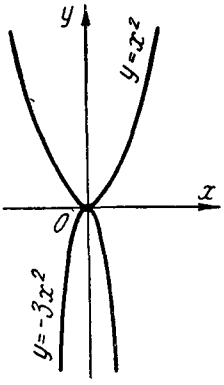
Фиг. 4,6.



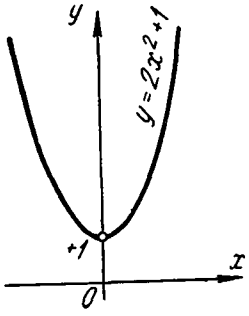
Фиг. 4,7.

Задача 4, 17. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: 1) $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 2)^2$.

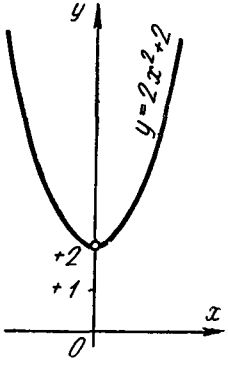
Решение. 1) График функции $y = (x + 1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ переносом его на 1 ед. масштаба вдоль оси Ox влево — фиг. 4, 13*а* и 4, 13*б* (см. указание 4, 3, стр. 25).



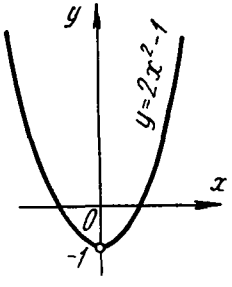
Фиг. 4,8.



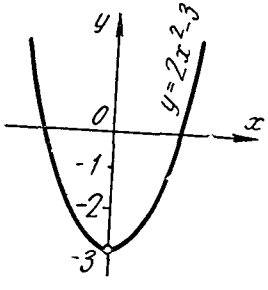
Фиг. 4,9.



Фиг. 4,10.

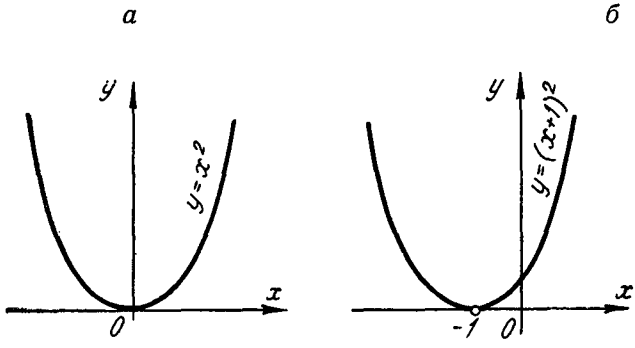


Фиг. 4,11.



Фиг. 4,12.

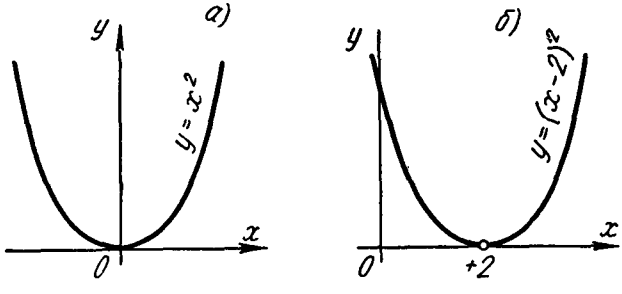
2) График функции $y=(x-2)^2$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом его вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо — фиг. 4, 14а и 4, 14б (использовать то же указание).



Фиг. 4,13.

Задача 4, 18 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y=x^2$ построить графики функций;

$$1)\ y=2(x+2)^2;\quad 2)\ y=\frac{1}{2}(x-1)^2.$$



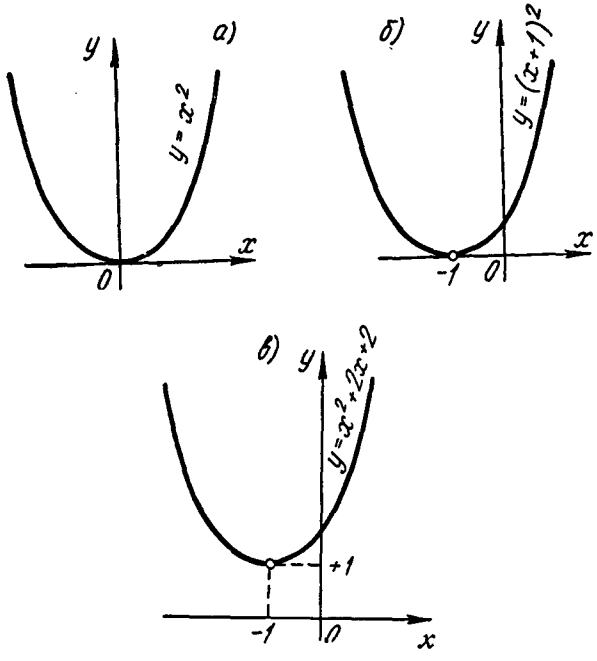
Фиг. 4,14.

Задача 4, 19. Пользуясь графиком функции $y=x^2$, построить график функции $y=x^2+2x+2$.

Решение. Заданную функцию представим в виде $y=(x+1)^2+1$. Исходя из графика функции $y=x^2$, построим сначала график функции $y=(x+1)^2$, а потом этот график перенесем на 1 ед. масштаба вверх (фиг. 4, 15) — см. указание 4, 4 стр. 25.

Задача 4, 20 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y=x^2$, построить график функции $y=4x^2+8x+12$.

Указание. Заданную функцию записать в виде $y = 4(x + 1)^2 + 8$ и вести построение в такой последовательности: 1) $y = x^2$; 2) $y = (x + 1)^2$; 3) $y = 4(x + 1)^2$; 4) $y = 4(x + 1)^2 + 8$.



Фиг. 4,15.

Задача 4, 21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = -x^2 + 2x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;

3) $y = 5x^2 + 4x + 7$; 4) $y = 2x^2 + 4x$;

5) $y = -3x^2 - x$.

Найти также точки пересечения этих парабол с осью Ox.

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в построении графиков функций. Графики показательной и логарифмической функции.

Задача 5, 1. Построить график кубической параболы $y = x^3$ (график этой функции, так же как и график параболы второй степени, надо хорошо запомнить).

Решение. Функция $y = x^3$ определена прн всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$. Функция эта нечетная $(y(-x) = -x^3 = -y(x))$