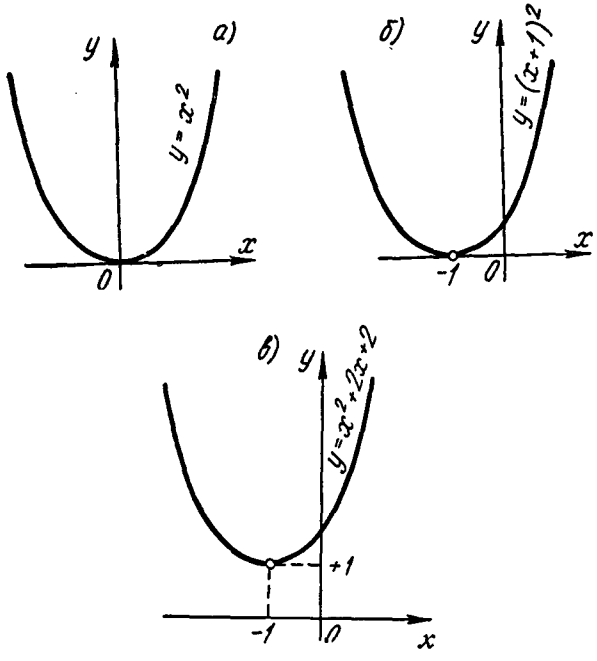
Указание. Заданную функцию записать в виде $y = 4(x + 1)^2 + 8$ и вести построение в такой последовательности: 1) $y = x^2$; 2) $y = (x + 1)^2$; 3) $y = 4(x + 1)^2$; 4) $y = 4(x + 1)^2 + 8$.



Фиг. 4,15.

Задача 4, 21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = -x^2 + 2x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;

3) $y = 5x^2 + 4x + 7$; 4) $y = 2x^2 + 4x$;

5) $y = -3x^2 - x$.

Найти также точки пересечения этих парабол с осью Ox.

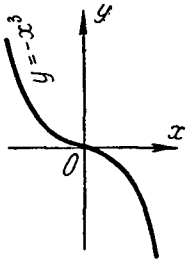
ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в построении графиков функций. Графики показательной и логарифмической функции.

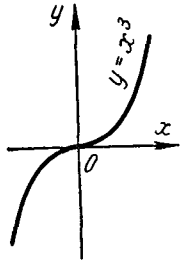
Задача 5, 1. Построить график кубической параболы $y = x^3$ (график этой функции, так же как и график параболы второй степени, надо хорошо запомнить).

Решение. Функция $y = x^3$ определена прн всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$. Функция эта нечетная $(y(-x) = -x^3 = -y(x))$

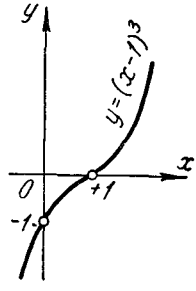
Поэтому мы построим сначала ту часть ее графика, которая соответствует значениям $x \geqslant 0$, а затем для построения полного графика воспользуемся указанием к построению графика нечетной функции (стр. 24). Так как данная функция определена при



Фиг. 5,1.



Фиг. 5,2.



Фиг. 5,3.

любом значении x, то мы можем составить таблицу числовых значений функции для нескольких произвольных значений аргумента.

1) Построим точки $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(2, 8)$, $A_4(3, 27)$ и соединим их плавной кривой. Построим после этого кривую, симметричную этой кривой относительно начала координат.

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27

Вся полученная кривая и будет приближенным графиком функции $y = x^3$ (фиг. 5, 1).

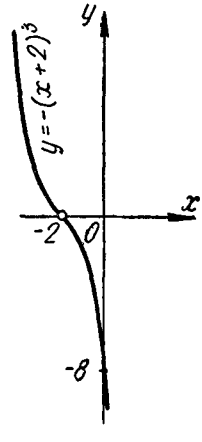
Задача 5,2 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = x^3$, построить графики функций:

1) $y = -x^3$; 2) $y = (x-1)^3$;
3) $y = -(x+2)^3$; 4) $y = 2x^3$;
5) $y = -\frac{1}{2}x^3$; 6) $y = x^3 + 2$;
7) $y = x^3 - 1$; 8) $y = -x^3 + 3$; 9) $y = 2(x+1)^3 + 2$.

Указание. Построение этих графиков следует выполнить на основании указаний 4,1 — 4,6 стр. 25 (см. фиг. 5,2 — 5,6).

Задача 5,3 (для самостоятельного решения). Построить график параболы четвертой степени $y = x^4$ и, пользуясь им, построить графики функций:

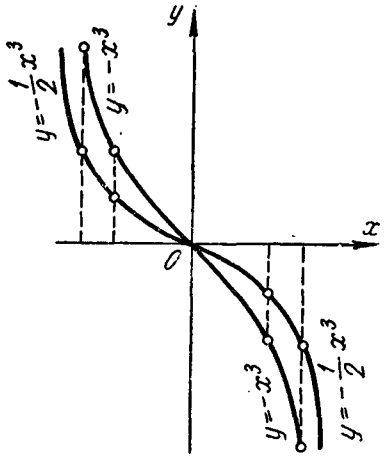
1) $y = 2x^4$; 2) $y = x^4 + 1$; 3) $y = -x^4$;
4) $y = -2x^4$; 5) $y = \frac{1}{2}x^4$; 6) $y = (x-1)^4$;
7) $y = 2(x+1)^4 - 2$



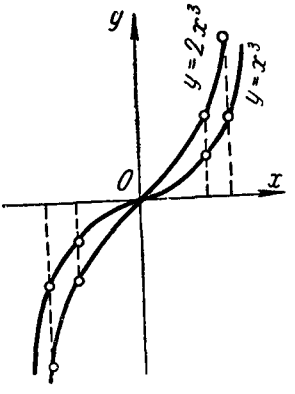
Фиг. 5,4.

(графики удобно строить на одном чертеже, используя указания 4,3—4,7 стр.).

Задача 5,4. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$ (функция $y = \frac{m}{x}$ выражает закон обратной пропорциональности между пере-



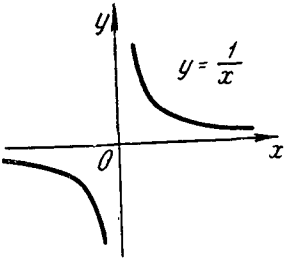
Фиг. 5,5.



Фиг. 5,6.

менными x и y, а ее график называется графиком обратной пропорциональности).

Решение. Прежде всего замечаем, что заданная функция — нечетная, так как $y(-x) = -\frac{1}{x} = -y(x)$.



Фиг. 5,7.

Функция $y = \frac{1}{x}$ определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Ее область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Построим часть графика для значений $x > 0$, а полный график функции получим на основании указания для построения графика нечетной функции (стр. 24). Составим таблицу числовых значений функции для положительных значений аргумента.

Построим на плоскости точки $A_1\left(\frac{1}{4}, 4\right)$, $A_2\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ $A_3\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $A_4(1, 1)$ $A_5\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $A_6\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $A_7\left(4, \frac{1}{4}\right)$, соединим их плавной кривой линией. Теперь построим кривую, симметричную ей относительно начала координат, и получим приближенный полный график функции (фиг. 5,7)

x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

$$y = \frac{1}{2}.$$

Эта кривая, как известно читателю из аналитической геометрии, — равнобочная гипербола (иногда говорят равноосная гипербола).

График этой функции был уже рассмотрен в первой части этого пособия. Там же был рассмотрен и график дробнолинейной функции вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

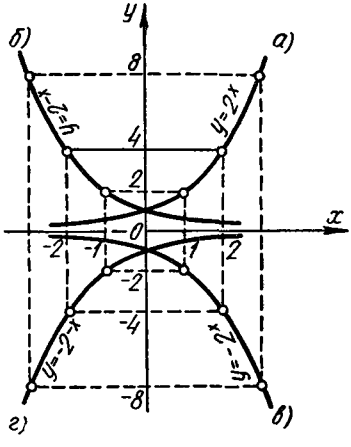
Числителю рекомендуется повторить относящиеся сюда вопросы.

ГРАФИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Задача 5,5. Построить график функции $y = 2^x$

Считая этот график исходным, построить график функций:

1) $y = 2^{-x}$; 2) $y = -2^x$;
3) $y = -2^{-x}$.



Фиг. 5,8.

Решение. Показательная функция $y = 2^x$ определена при всех значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Составим таблицу числовых значений функции, давая аргументу произвольные значения.

Построим на плоскости эти точки, соединим их плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,8 *а*).

1) График функции $y = 2^{-x}$ симметричен графику функции

$y = 2^x$ относительно оси Oy (фиг. 5,8*б*), т. к. если $y(x) = 2^x$, то $y(-x) = 2^{-x}$ (см. указание 4,1 на стр. 25).

x	y
-5	$\frac{1}{32}$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

2) График функции $y = -2^x$ симметричен графику функции $y = 2^x$ относительно оси Ox — см. указание 4,2, стр. 25 (фиг. 5,8*в*).

3) График функции $y = -2^{-x}$ симметричен графику функции $y = 2^{-x}$ относительно оси Ox (фиг. 5,8*г*) — см. указание 4,2, стр. 25.

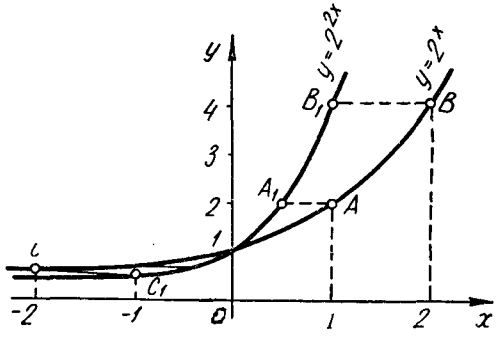
Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$, 2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 3) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

Задача 5,7. Построить график функции $y = 2^{2x}$, считая исходным график функции $y = 2^x$.

Решение. Для построения графика функции $y = 2^{2x}$ по исходному графику $y = 2^x$ следует воспользоваться указанием 4,6 (стр. 25).

Сначала построим график функции $y = 2^x$. На этом графике выбираем несколько точек. На том же чертеже построим точки, ординаты которых равны ординатам выбранных точек, но с абсциссами в два раза меньшими, чем у них (на фиг. 5,9 на графике функции $y = 2^x$ выбраны точки A, B и C). Получен-



Фиг. 5,9.

ные точки соединим плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = 2^{2x}$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Считая исходным график функции $y = 2^x$, построить график функции $y = 2^{\frac{x}{2}}$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 3^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

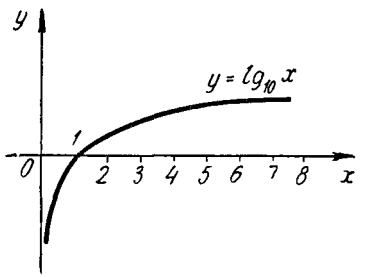
$$1)\ y = 1 + 3^x; \qquad 2)\ y = 3^x - 2; \qquad 3)\ y = 3^{x-2};$$

$$4)\ y = 3^{\frac{1}{3}x}.$$

Указание. При построении графиков функций 1) и 2) использовать указание 4,4 (стр. 25), а при построении графика функции 4) использовать указание 4,6 стр. 25.

Задача 5.10. Построить график функции $y = \log_{10} x$.

Решение. Заданная функция определена только для значений $x > 0$. Составим таблицу числовых значений функции при нескольких произвольно выбранных положительных значениях аргумента. Построим на плоскости точки, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим им значениям функции.



Фиг. 5,10.

x	y
$\frac{1}{100}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021

Построенные точки соединим плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,10).

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = \log_{10} x$, построить графики функций 1) $y = \log_{10} x^3$; 2) $y = \log_{10}(x - 1)$; 3) $y = \log_{10}(-x)$; 4) $y = \log_{10} \frac{1}{x}$.

Указание к 4): $\log_{10} \frac{1}{x} = \log_{10} 1 - \log_{10} x = -\log_{10} x$.

Использовать также указание 4,2 (стр. 25).

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача 6,1. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = \cos x$.