Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 3^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

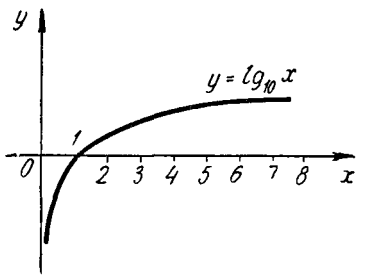
$$1)\ y = 1 + 3^x; \qquad 2)\ y = 3^x - 2; \qquad 3)\ y = 3^{x-2};$$

$$4)\ y = 3^{\frac{1}{3}x}.$$

Указание. При построении графиков функций 1) и 2) использовать указание 4,4 (стр. 25), а при построении графика функции 4) использовать указание 4,6 стр. 25.

Задача 5.10. Построить график функции $y = \log_{10} x$.

Решение. Заданная функция определена только для значений $x > 0$. Составим таблицу числовых значений функции при нескольких произвольно выбранных положительных значениях аргумента. Построим на плоскости точки, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим им значениям функции.



Фиг. 5,10.

x	y
$\frac{1}{100}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021

Построенные точки соединим плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,10).

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = \log_{10} x$, построить графики функций 1) $y = \log_{10} x^3$; 2) $y = \log_{10}(x - 1)$; 3) $y = \log_{10}(-x)$; 4) $y = \log_{10} \frac{1}{x}$.

Указание к 4): $\log_{10} \frac{1}{x} = \log_{10} 1 - \log_{10} x = -\log_{10} x$.

Использовать также указание 4,2 (стр. 25).

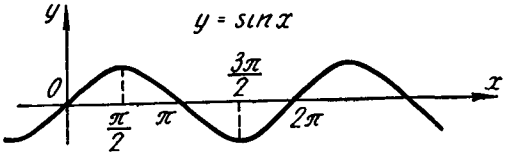
ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

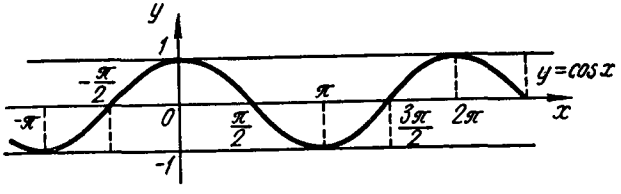
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача 6,1. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = \cos x$.

Решение. Функцию $y = \cos x$ представим в виде $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. График этой функции получится из графика функции $y = \sin x$ (фиг. 6,1), перенесением его вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{2}$ ед. масштаба (фиг. 6,2).

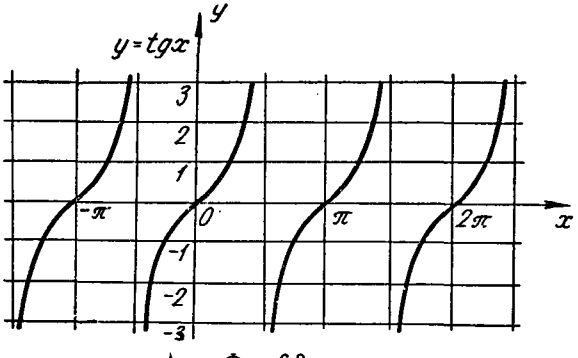


Фиг. 6,1.



Фиг. 6,2.

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Считая известным график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,2), построить график функции $y = \sin x$.



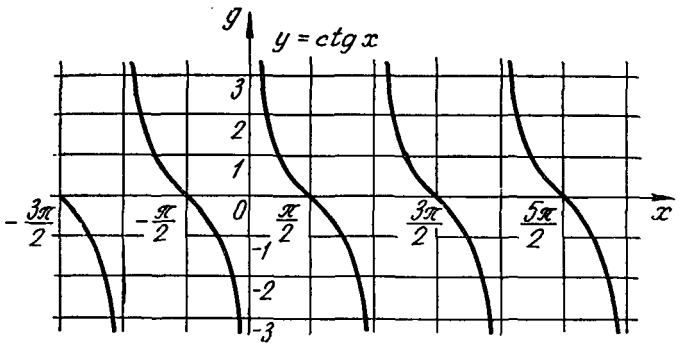
Фиг. 6,3.

Задача 6,3 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Указание. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 1) Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ (фиг. 6,3);

2) Пользуясь им, получить график функции $y = \operatorname{tg}(-x)$ и потом с помощью сдвига вдоль оси Ox получить график функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$.

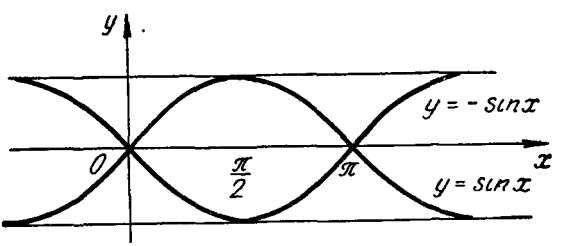
График функции $y = \operatorname{ctg} x$ представлен на фиг. 6,4.



Фиг. 6,4.

Задача 6,4. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = -\sin x$.

Решение. Если построить кривую, симметричную относительно оси Ox графику функции $y = \sin x$, то она и будет являться



Фиг. 6,5.

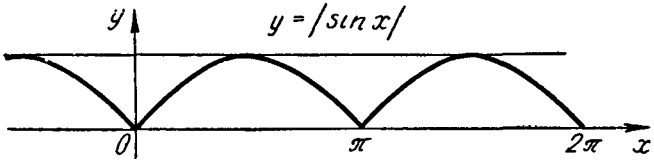
графиком функции $y = -\sin x$ (фиг. 6,5). График функции $y = \sin(-x)$ совпадает с графиком функции $y = -\sin x$. Почему?

Задача 6,5 (для самостоятельного решения). Начертить график функции $y = |\sin x|$ (фиг. 6,6).

Задача 6,6. Начертить график функции $y = 2\sin x$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

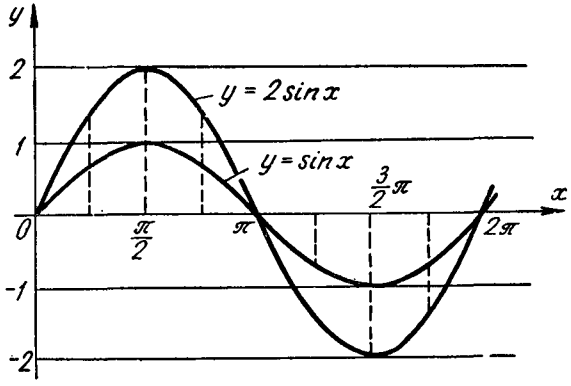
Решение. Начертим одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ (график этой функции можно срисовать из учебника). Выберем на этом графике несколько точек. Построим теперь

на том же чертеже точки с абсциссами, равными абсциссам выбранных точек, но с ординатами, увеличенными в два раза. Соединив эти точки плавной кривой линией, получим приближенный график функции $y = 2 \sin x$ (фиг. 6,7).



Фиг. 6,6.

Теперь, пользуясь периодичностью этой функции (ее период равен 2π), продолжим построенный график в соседние интервалы.



Фиг. 6,7.

Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

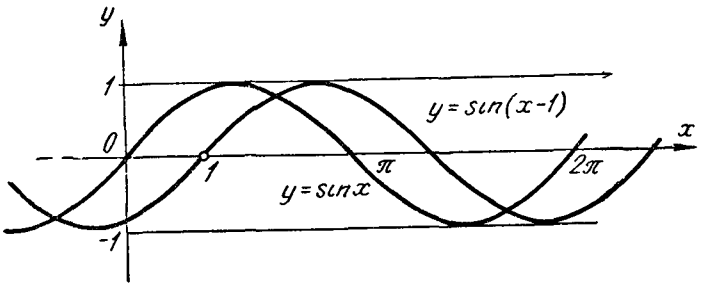
$$1)\ y = 3\cos x; \qquad 2)\ y = \frac{1}{2}\sin x.$$

Задача 6,8. Построить график функции $y = \sin(x - 1)$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

Решение. Чтобы построить график функции $y = \sin(x - 1)$, начертим сначала одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и перенесем ее вправо на 1 ед. масштаба. Зная, что

заданная функция имеет период, равный 2π, продолжим построенный график в соседние интервалы (фиг. 6,8).

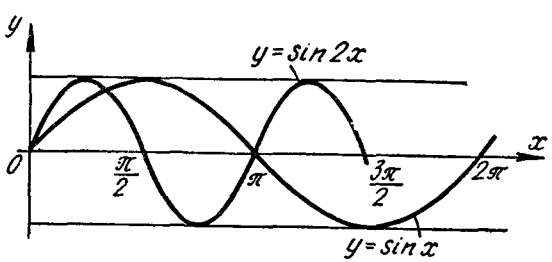
Задача 6,9 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \cos(x + 2)$ и 2) $y = \sin(x + 3)$, исходя из графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$.



Фиг. 6,8.

Задача 6,10. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Решение. Используем указание 4,6, стр. 25. Чтобы построить график функции $y = \sin 2x$, построим сначала одну волну синусоиды $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.



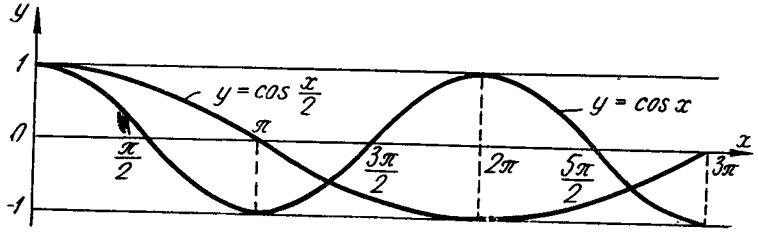
Фиг. 6,9.

Выберем на построенной кривой несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в два раза. Полученные точки соединим плавной кривой. Пользуясь периодичностью заданной функции $y = \sin 2x$ (фиг. 6,9) (ее период $T = \pi$), продолжим полученный график в соседние интервалы $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, находящиеся справа и слева от интервала $(0, \pi)$.

Задача 6,11 (для самостоятельного решения). Исходя из графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, построить графики функций: 1) $y = \sin 3x$ и 2) $y = \cos \frac{1}{3} x$.

Задача 6,12. Построить график функции $y = \cos \frac{1}{2} x$.

Решение. Построим на отрезке $[0, 2\pi]$ сначала график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,10). Используем указание 4,6 стр. 25. Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами равными, ординатам выбранных точек, но с абсциссами, в два раза бо́льшими, чем абсциссы выбранных точек.



Фиг. 6,10.

Построение кривой показано на фиг. 6.10. Функция $y = \cos \frac{1}{2} x$ — периодическая. Ее период равен 4π. Пользуясь периодичностью этой функции, ее график, построенный на отрезке $[0, 4\pi]$, продолжим в соседние интервалы $(4\pi, 8\pi)$; $(8\pi, 12\pi)$; $(-4\pi, 0)$; $(-8\pi, -4\pi)$.

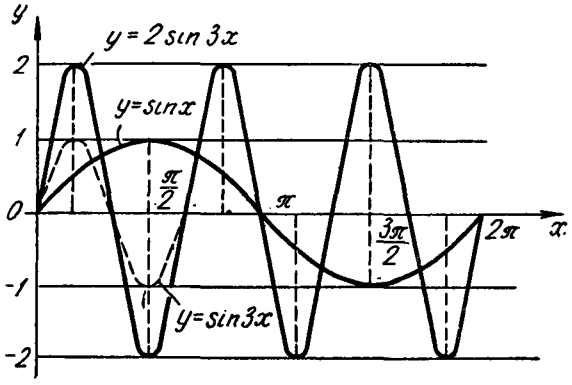
Задача 6,13 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \sin \frac{x}{2}$; 2) $y = \cos \frac{2x}{3}$; 3) $y = \sin \frac{x}{3}$.

Задача 6,14. Построить график функции $y = 2 \sin 3x$.

Решение. Будем исходить из графика функции $y = \sin x$. Построим одну волну этого графика на отрезке $[0, 2\pi]$. Пользуясь этим графиком, построим график функции $y = \sin 3x$. Для этого, как уже известно читателю, следует на кривой $y = \sin x$ выбрать несколько точек и построить точки с ординатами, равными ординатам этих точек, но с абсциссами в три раза меньшими, чем абсциссы выбранных точек. Построенные точки соединим плавной кривой линией.

После того как построена кривая $y = \sin 3x$, на основании указания 4,5 стр. 25 построим кривую $y = 2 \sin 3x$. Это надо сделать так: оставив абсциссы построенных точек без изменения, построить точки, ординаты которых в два раза больше, чем орди-

наты построенных точек. Построения показаны на фиг. 6,11. После этого построенную кривую следует продолжить в соседние интервалы $\left(\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi\right)$; $\left(\frac{4}{3}\pi; \frac{6}{3}\pi\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\pi; 0\right)$ $\left(-\frac{4}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi\right)$ и т. д., используя то, что заданная функция — периодическая с периодом $T = \frac{2}{3}\pi$.



Фиг. 6,11.

Задача 6,15 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y = 3\cos 2x$; 3) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Указание. При построении графика функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ следует исходить из графика фуикции $y = \operatorname{tg} x$. Пользуясь этим графиком, построить график функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, а потом уже кривую $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Задача 6,16 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = -\sin 2x$; 2) $y = -3\cos\frac{x}{3}$; 3) $y = -2\sin\frac{x}{2}$.

Задача 6,17 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 2\sin(x-1)$.

Указание. 1) Исходя из графика функции $y = \sin x$ построить график функции $y = \sin(x-1)$. 2) Зная график функции $y = \sin(x-1)$, построить график данной функции $y = 2\sin(x-1)$.

Задача 6,18. Построить график функции $y = \sin(2x+3)$.

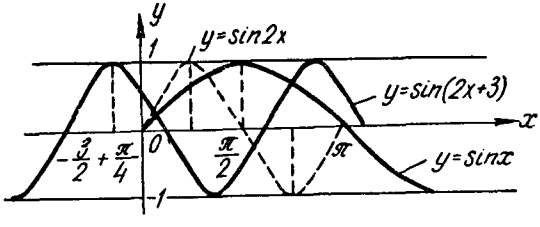
Решение. Представим заданиую функцию в виде $y = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$ и будем вести построение графика в таком порядке:

1) Построим на отрезке $[0,2\pi]$ график функции $y = \sin x$.

2) Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в 2 раза. Построенные точки соединим плавной кривой линией. Эта кривая линия будет графиком функции $y = \sin 2x$.

3) Перенесем этот график влево вдоль оси Ox на $\frac{3}{2}$ ед. масштаба и получим график функции $y = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, т. е. график заданной функции $y = \sin(2x + 3)$ (фиг. 6,12).

Следует предостеречь читателя от одной распространенной ошибки. Эта ошибка состоит в том, что для построения графика



Фиг. 6,12.

функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$ иногда поступают так: из графика функции $y = \sin x$ получают график функции $y = \sin \omega x$, и этот график переносят вдоль оси Ox на φ ед. масштаба, вместо того, чтобы его перенести на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Чтобы избежать этой ошибки, надо функцию вида $y = \sin(\omega x + \varphi)$ представить в виде $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$, т. е. сделать так, чтобы в скобках под знаком синуса коэффициент при x был равен 1. Из рассмотрения функции $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ сразу видно, что перенос вдоль оси Ox должен быть сделан не на φ ед. масштаба, а на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Задача 6,19 (для самостоятельного решения). Построить графики функции: 1) $y = \sin(4x + 8)$; 2) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$; 3) $y = -\sin(2x - 4)$.

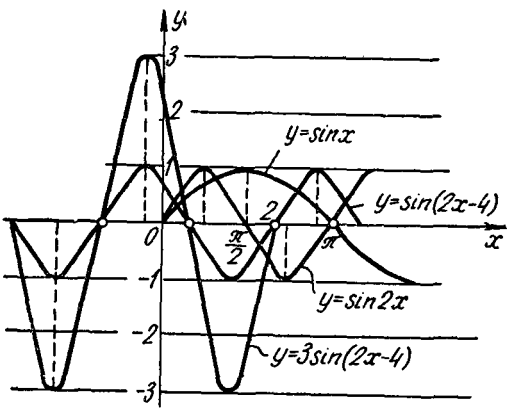
Задача 6,20. Построить график функции $y = 3\sin(2x - 4)$.

Решение. Представим заданную функцию в виде $y = 3\sin 2(x - 2)$. Построим одну волну синусоиды на отрезке $[0,2\pi)$.

Считая этот график исходным, построим график функции

$$y = \sin 2x.$$

Если перенести эту кривую вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо, то получим график функции $y = \sin 2(x - 2)$. Выберем на этом графике несколько точек и, не изменяя абсцисс этих точек, увеличим их ординаты в три раза. Соединив полученные точки плавной кривой линией, получим приближенный график данной функции $y = 3\sin 2(x - 2)$. Зная, что заданная функция перио-



Фиг. 6,13.

дическая и что ее период $T = \pi$, продолжим полученный график в соседние интервалы, как мы это делали в предыдущих задачах (фиг. 6,13).

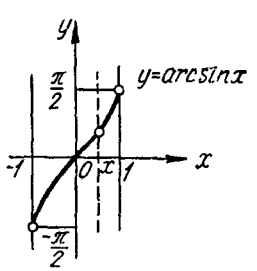
Задача 6,21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2\cos(3x + 1)$; 2) $y = 2\cos 3x = 1$;
3) $y = -2\sin(2x - 1)$; 4) $y = -3\cos(3x + 1)$;
5) $y = |\sin 2x|$.

Задача 6,22. Построить график функции $y = \arcsin 2x$, считая исходным график функции $y = \arcsin x$.

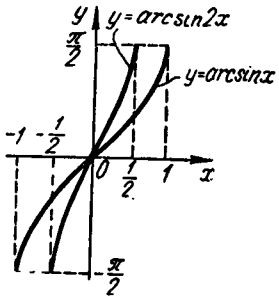
Решение. График функции $y = \arcsin x$ представлен на фиг. 6,14, перечертите этот график. Выберите на нем несколько точек.

Постройте точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, то с абсциссами, уменьшенными в два раза. По-



Фиг. 6,14.

строенные точки соедините плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = \arcsin 2x$ (фиг. 6,15).

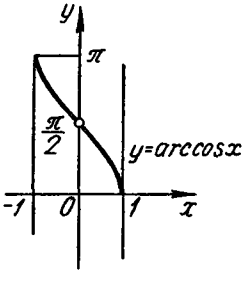


Фиг. 6,15.

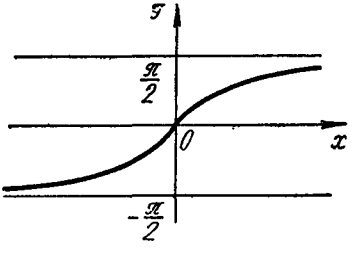
Задача 6,23 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arcsin x$ (фиг. 6,14), постройте графики функций: 1) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 2) $y = \arcsin (x+1)$; 3) $y = \arcsin (x-1)$; 4) $y = 2 \arcsin x$; 5) $y = \arcsin x - 1$; 6) $y = -\arcsin x$.

Задача 6,24 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arccos x$ (фиг. 6,16), построить графики функций: 1) $y = -\arccos x$; 2) $y = \arccos (-x)$; 3) $y = \arccos \frac{x}{3}$; 4) $y = \arccos \left(\frac{x}{3} + 1\right)$; 5) $y = 2 \arccos 2x$.

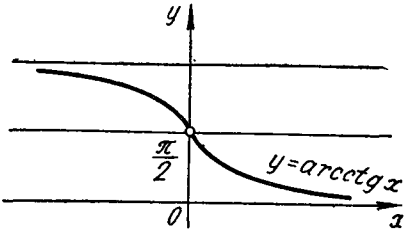
Задача 6,25 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (фиг. 6,17 и 6,18), построить графики функций: 1) $y = 2 \operatorname{arctg} x$; 2) $y = -\operatorname{arctg} x$; 3) $= \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x + 2$; 5) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x$.



Фиг. 6,16.



Фиг. 6,17.



Фиг. 6,18.