СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций, заданных несколькими аналитическими выражениями. Построение графика суммы, разности и произведения нескольких функций.

Определение функции, данное в кратких сведениях по теории предпосланных второму практическому занятию, не предполагает, что функция обязательно задается одной формулой. Может оказаться, что на различных участках изменения аргумента функция задана различными формулами.

С таким способом задания функции приходится встречаться и в математических исследованиях, и в таких науках, как сопротивление материалов, теплотехника, радиотехника и др. Поэтому этот способ не следует считать чем-то надуманным.

Задача 7,1. Функция задана следующими равенствами:

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x+3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Построить график.

Решение. Если $x \leqslant -1$, то функция задана равенством $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1*а*). На участке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция задана равенством $y = x + 3$. Графиком этой функции является прямая линия, на которой надо взять отрезок ее, соответствующий значениям аргумента x из отрезка $[-1,0]$ (фиг. 7,1*б*).

На участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $y = -x + 3$, ее график—прямая линия, на которой следует взять отрезок, соответствующий значениям аргумента из отрезка $[0,1]$ (фиг. 7,1*в*) и для значений $x \geqslant 1$ функция $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1 *г*).

В «собранном» виде график заданной функции представлен на фиг. 7,1 *д*.

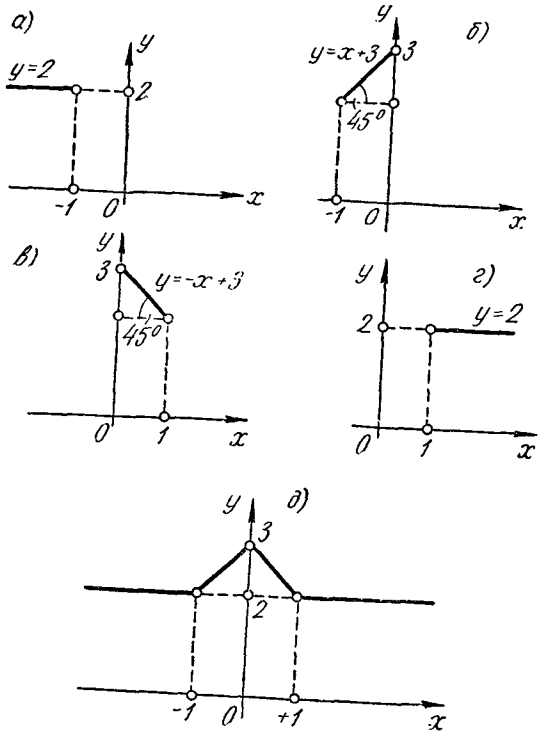
Задача 7,2. Построить график функции, определяемой равенствами

$$y = x^2, \text{ если } x \leqslant 0;$$

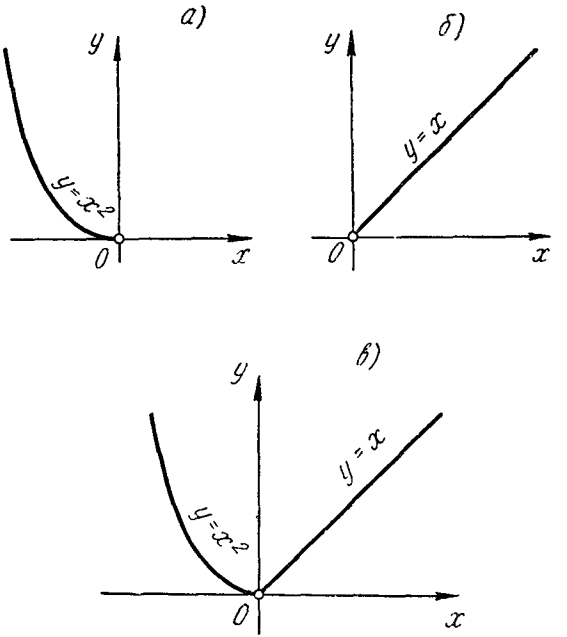
$$y = x, \text{ если } x \geqslant 0.$$

Решение. Графиком функции $y = x^2$ для значений $x \leqslant 0$ является часть параболы, расположенная во втором квадранте (фиг. 7,2 *а*).

Графиком функции $y = x$ для значений $x \geqslant 0$ является полупрямая — биссектриса первого координатного угла (фиг. 7,2 *б*). На фиг. 7,2 *в* график задаиной функции представлен в «собранном» виде.


а)
y
y=2
2
-1
0
x
б)
y
y=x+3
3
45°
-1
0
x
в)
y
3
y=-x+3
45°
0
1
x
г)
y
2
y=2
0
1
x
д)
y
3
2
-1
0
+1
x

Фиг. 7,1.


а)
y
y=x²
0
x
б)
y
y=x
0
x
в)
y
y=x²
y=x
0
x

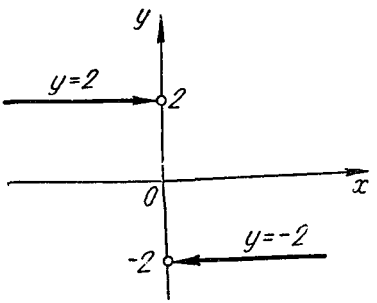
Фиг. 7,2.

Перед решением приведенных ниже задач введем такое условие: если на кривых линиях или на полупрямых поставлены стрелки, то это означает, что концы этих линий, на которых находятся стрелки, не принадлежат графику функции.

Задача 7.3. Построить график функции

$$y = \begin{cases} +2 \text{ для } x < 0; \\ -2 \text{ для } x > 0. \end{cases}$$

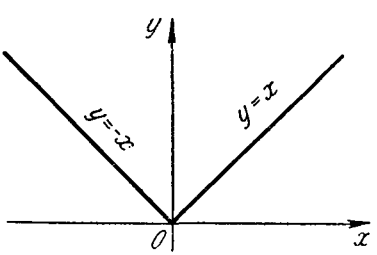
Решение. См. фиг. 7,3.



Фиг. 7,3.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). Построить график функции, определяемой равенствами

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$



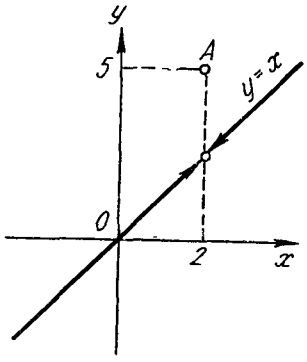
Фиг. 7,4.

(график этой функции представлен на фиг. 7,4). Эта функция может быть задана одним аналитическим выражением: $y = |x|$, где $|x|$ — абсолютная величина x.

Задача 7,5. Построить график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \neq 2, \\ 5, \text{ если } x = 2, \end{cases}$$

Решение. График функции состоит из всех точек прямой $y = x$, кроме точки (2,2). Эта точка удалена из прямой («изъята», «вырвана»). Она помещена в точку (2,5). Это изолированная точка графика функции (фиг. 7,5).



Фиг. 7,5.

Задача 7,6 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемые равенствами:

$$1)\ y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 8 & \text{для } 3 \leqslant x \leqslant 6 \\ x + 2 & \text{для } x \geqslant 6 \end{cases}$$

$$2)\ y = \begin{cases} x - 1 & \text{для } x < 0 \\ 3x & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

(не забывайте на прямых проставлять стрелки, если они нужны на основании сделанного выше условия. В примере 2) они нужны)

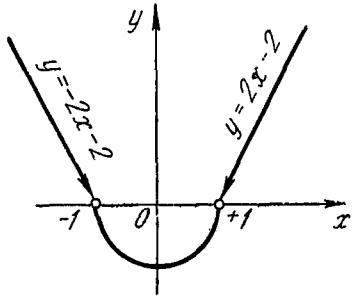
$$3)\ y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{для } x < 2 \\ 3 & \text{для } x = 2 \\ 2x - 9 & \text{для } x > 2 \end{cases} \qquad 4)\ y = \begin{cases} x + 1 & \text{для } x < 0 \\ 0 & \text{для } x = 0 \\ x - 1 & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

Задача 7,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемых равенствами

1)

$$y = \begin{cases} -2x - 2, & \text{если } x < -1; \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Указание. График функции $y = -\sqrt{1 - x^2}$ — часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в нижней полуплоскости (фиг. 7,6).



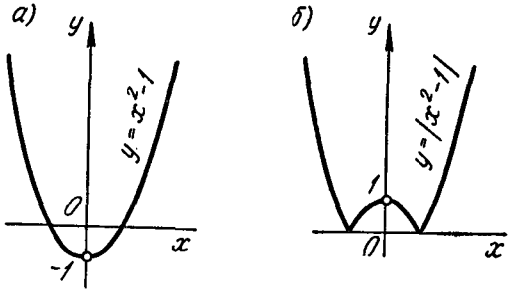
Фиг. 7,6.

$$2)\ y = \begin{cases} x, & \text{если } < -2; \\ 3, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ x^2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$3)\ y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 2, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 6; \\ \sqrt{-32 + 12x - x^2}, & \text{если } 6 \leqslant x \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

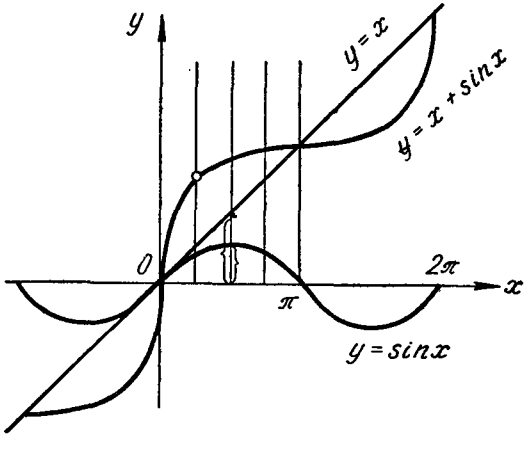
1) $y = |x^2 - 1|$; (фиг. 7,7 *а* и 7,7 *б*)
2) $y = 2 - |x|$;
3) $y = |x^2 - 7x + 12|$.



Фиг. 7,7.

Задача 7,9. Построить график функции $y = x + \sin x$.

Решение. Построим на одном чертеже графики слагаемых функций (фиг. 7,8): $y = x$ и $y = \sin x$.



Фиг. 7,8.

Проведем ряд вертикальных прямых, пересекающих графики этих функций, и пометим на них точки, ординаты которых равны сумме ординат слагаемых функций. Каждая из точек, построенных на этих вертикальных прямых, имеет абсциссу такую же, как и соответствующие точки обоих графиков. Соединяя получен-

ные точки плавной кривой, получим график данной функции $y = x + \sin x$ (конечно, полученный график будет приближенным).

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2^x + \sin x$;
2) $y = 3^x + \cos x$;
3) $y = \sin x + \cos x$;
4) $y = \sin 2x + 2\cos x$;
5) $y = x \sin x$.

Указание. При построении графика функции $y = x \sin x$ (пример 5) учесть, что: 1) эта функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси Oy. 2) Учитывая, что x умножается на $\sin x$, который по абсолютной величине не больше единицы, заключаем, что абсолютная величина произведения $x \sin x$, т. е. $|x \sin x|$, не больше $|x|$, т. е. $|x \sin x| \leqslant |x|$, а потому график функции $y = x \sin x$ расположен между двумя биссектрисами координатных углов $y = x$ и $y = -x$. В точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}, \ldots, \pm\frac{(2\pi+1)\pi}{2}$ график функции $y = x \sin x$ касается этих биссектрис, а в точках O, $\pm\pi$; $\pm 2\pi$... график пересекает ось Ox.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Построить графики функций

1) $y = x^3 + 2x^2$;
2) $y = x + \cos x$;
3) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^3$;
4) $y = x^3 \cos x$;
5) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Решение уравнений с помощью графиков (графическое решение уравнений).

Если не требуется большой точности, то можно корни различных уравнений находить при помощи графиков функций. Для этого поступают так:

Способ 1. *Все члены уравнения переносят в его левую часть (правая часть оказывается при этом равной нулю), обозначают левую часть через $f(x)$, и тогда уравнение приобретает вид $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — левая часть уравнения. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox и будут корнями уравнения, так как в этих точках $y = 0$.*