ные точки плавной кривой, получим график данной функции $y = x + \sin x$ (конечно, полученный график будет приближенным).

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2^x + \sin x$;
2) $y = 3^x + \cos x$;
3) $y = \sin x + \cos x$;
4) $y = \sin 2x + 2\cos x$;
5) $y = x \sin x$.

Указание. При построении графика функции $y = x \sin x$ (пример 5) учесть, что: 1) эта функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси Oy. 2) Учитывая, что x умножается на $\sin x$, который по абсолютной величине не больше единицы, заключаем, что абсолютная величина произведения $x \sin x$, т. е. $|x \sin x|$, не больше $|x|$, т. е. $|x \sin x| \leqslant |x|$, а потому график функции $y = x \sin x$ расположен между двумя биссектрисами координатных углов $y = x$ и $y = -x$. В точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}, \ldots, \pm\frac{(2\pi+1)\pi}{2}$ график функции $y = x \sin x$ касается этих биссектрис, а в точках O, $\pm\pi$; $\pm 2\pi$... график пересекает ось Ox.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Построить графики функций

1) $y = x^3 + 2x^2$;
2) $y = x + \cos x$;
3) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^3$;
4) $y = x^3 \cos x$;
5) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

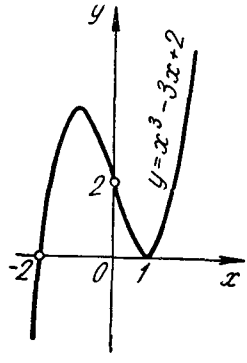
ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Решение уравнений с помощью графиков (графическое решение уравнений).

Если не требуется большой точности, то можно корни различных уравнений находить при помощи графиков функций. Для этого поступают так:

Способ 1. *Все члены уравнения переносят в его левую часть (правая часть оказывается при этом равной нулю), обозначают левую часть через $f(x)$, и тогда уравнение приобретает вид $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — левая часть уравнения. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox и будут корнями уравнения, так как в этих точках $y = 0$.*

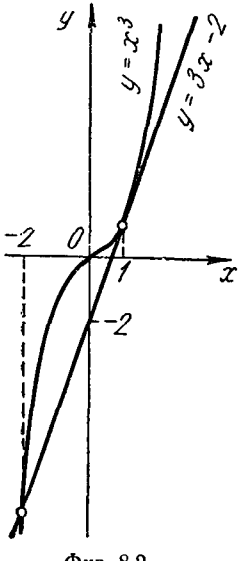
Способ 2. *Члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую — в правой. Уравнение приобретает вид $f(x) = f_1(x)$. После этого строят графики двух функций $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$. Корнями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения этих графиков. Так, если точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, то в этой точке ординаты графиков между собой равны, и тогда $f(x_0) = f_1(x_0)$. Это равенство показывает, что x_0 — корень уравнения. Второй из указанных способов предпочтительнее первого; он особенно удобен, когда одна из частей уравнения является линейной функцией.*



Фиг. 8,1.

Задача 8,1. Решить графически уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ первым и вторым из указанных способов.

Решение. ***1-й способ.*** Построим график функции $y = x^3 - 3x + 2$ (фиг 8,1) и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox: $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = 1$. Кривая касается оси Ox в точке $x = 1$, а потому уравнение имеет кратный корень $x = 1$ (следует иметь в виду, что уравнение третьей степени с действительными коэффициентами имеет или один действительный корень или все три его корня — действительны. Так как кривая пересекла ось Ox в одной точке и коснулась ее в другой, то в той точке, где имеет место касание, будет кратный корень. В данном случае таким двукратным корнем является 1).



Фиг. 8,2.

2-й способ. Перепишем данное уравнение в виде $x^3 = 3x - 2$. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 3x - 2$ (фиг. 8,2). Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков. Получим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. В точке $x_2 = 1$ прямая $y = 3x - 2$ касается графика функции $y = x^3$.

Задача 8,2 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Задачу решить двумя способами.

Ответ. Один действительный корень $x = 1$.

Указание. Прежде чем решать заданное уравнение вторым способом, его выгодно сначала упростить. Общий вид кубического уравнения записывается так:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \qquad (A)$$

После деления обеих частей равенства на a_0 оно преобразуется к виду $y^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$.

Если теперь сделать подстановку

$$x = y - \frac{b_1}{3}, \qquad (B)$$

то оно приведется к виду

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (C)$$

Этот вид кубического уравнения называется приведенным. Оно не содержит квадрата неизвестной величины. Уравнение (C) решить графически проще, чем исходное уравнение (A), т. к. здесь дело сведется к построению графика кубической параболы и прямой (см. предыдущую задачу), в то время как графическое решение уравнения (A) потребовало бы построения графиков кубической параболы и параболы второй степени (уравнение (A) следовало переписать так: $a_0x^3 = -a_1x^2 - a_2x - a_3$).

После того как решено уравнение (C), надо воспользоваться подстановкой (B) и найти неизвестное данного уравнения (A).

Задача 8,3. (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$.

Указание. Перейти к приведенному виду (C) кубического уравнения, использовав указание предыдущей задачи.

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$;
2) $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

Задача 8,4. Найти графически вторым способом положительный корень уравнения $x^4 - x - 1 = 0$.

Указание. При построении графиков функций $y = x^4$ и $y = x + 1$ масштабную единицу по оси Oy уменьшить в 5 раз.

Ответ. 1,22.

Задача 8,5. Найти графически наименьший положительный корень уравнения $x - \operatorname{tg} x = 0$

Указание. 1) Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = x$. 2) Начертить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ (фиг. 8,3). Графики

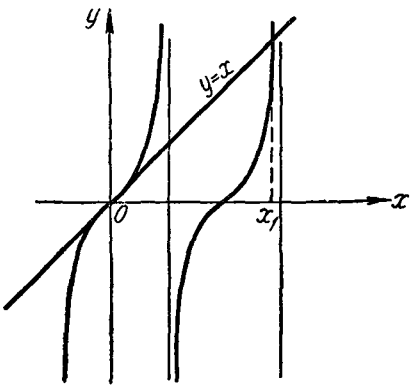
пересекаются в бесконечном множестве точек. Уравнение имеет бесчисленное множество корней.

Ответ. Наименьший положительный корень $x_1 \approx 4{,}5$ (более точное вычисление дает $x_1 = 4{,}4934$).

Задача 8,6. (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} x - 0{,}5x = 0$.

Ответ. $x \approx 4{,}3$.

Задача 8,7 (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший положительный корень уравнения $0{,}2x - \sin x = 0$.



Фиг. 8,3.

Указание. Искомый корень является наименьшей положительной абсциссой точки пересечения прямой $y = 0{,}2x$ и синусоиды $y = \sin x$.

Ответ. $x \approx 2{,}6$.

Задача 8,8 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \operatorname{tg} x = 0{,}3$.

Указание. Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = \frac{0{,}3}{x}$ и построить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{0{,}3}{x}$ (равновесная гипербола).

Ответ. 0,52.

Задача 8,9 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \sin x = 1$.

Ответ. $x \approx 1{,}1$.

Задача 8,10 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x - 2 \sin x = 0$ (найти положительный корень).

2) $\cos x - x^2 = 0$

Ответ. 1) $x \approx 1{,}9$; 2) $x = \pm 0{,}824$.