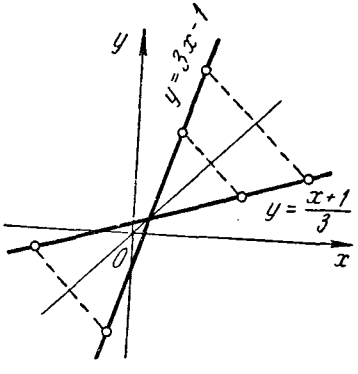
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Обратная функция и ее график. Периодические функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Обратная функция и ее график

Если функциональная зависимость y от x задана аналитически уравнением $y = f(x)$, из которого можно определить x как функцию от y уравнением $x = \varphi(y)$ так, что каждому значению y соответствует единственное значение x, то функция, определяемая уравнением $x = \varphi(y)$, называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$, которая в этой связи называется прямой. В уравнении $y = f(x)$ величина x — независимая переменная, а y — функция. Для того чтобы сохранить стандартные обозначения, в которых x обозначает независимую переменную, а y — функцию, в уравнении $x = \varphi(y)$ следует заменить y буквой x, а x — буквой y. Именно так полученную функцию $y = \varphi(x)$ мы и будем считать обратной по отношению к функции $y = f(x)$. График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику прямой функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



Фиг. 9,1.

Задача 9,1. Найти функцию, обратную функции $y = 3x - 1$, и построить ее график.

Решение. Находим из данного уравнения x в зависимости от y:

$$x = \frac{x+1}{3}.$$

Заменяя в этом равенстве x на y, а y на x, получаем окончательно

$$y = \frac{x+1}{3}.$$

Графики заданной функции и ей обратной представлены на фиг. 9,1

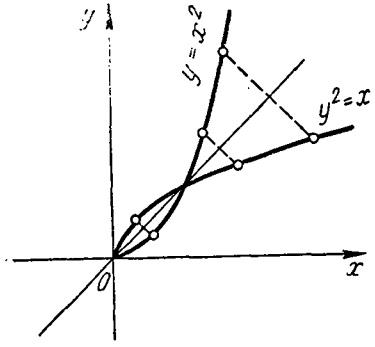
Задача 9,2. Найти функцию, обратную функции $y = x^2$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение. Из уравнения $y = x^2$ видно, что значения функции y заполняют полуотрезок $[0, +\infty)$. Если это уравнение разрешить относительно x, то получим уравнение $x = \pm\sqrt{y}$, из которого видно, что каждому значению y из полуотрезка $[0, +\infty)$ соответствует не одно, а два значения x из интервала

$(-\infty, +\infty)$. Отсюда мы заключаем, что если функцию $y = x^2$ рассматривать на интервале $(-\infty, +\infty)$, то для нее обратной функции не существует (x через y выражается не однозначно).

Если будем рассматривать данную функцию $y = x^2$ только для положительных значений x и $x = 0$, т. е. значений x из полуотрезка $[0, +\infty)$, тогда $x = +\sqrt{y}$, и каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует не два, а только одно значение x, обратная функция теперь существует и определяется уравнением $y = +\sqrt{x}$ (фиг. 9,2).

Если данную функцию $y = x^2$ рассматривать только для значений $x \leqslant 0$, то она и в этом случае будет иметь обратную функцию. Действительно, в этом случае $x = -\sqrt{y}$, каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует единственное значение x, и обратная функция определяется уравнением $y = -\sqrt{x}$.



Фиг. 9,2.

Задача 9,3 (для самостоятельного решения). Убедиться, что на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $y = \sin x$ не имеет обратной функции, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — имеет.

Задача 9,4. Найти функцию, обратную функции $y = \lg \frac{x}{5}$ $(x > 0)$.

Решение. 1) Находим x в зависимости от y:

$$\frac{x}{5} = 10^y; \quad x = 5 \cdot 10^y.$$

2) Заменим в последнем выражении x на y, а y на x и получим $y = 5 \cdot 10^x$. Это и есть функция, обратная данной.

Задача 9,5 (для самостоятельного решения). Найти функции, обратные данным:

1) $y = \sin(3x - 1)$, где $-\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\right) \leqslant x \leqslant +\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right)$;

2) $y = \arcsin \frac{x}{3}$ где $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

3) $y = 5 \operatorname{arctg} x$, где $(-\infty < x < +\infty)$.

Ответ. 1) $y = \frac{1}{3}(1 + \arcsin x)$;

2) $y = 3 \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{5}$.

При каких значениях x могут рассматриваться эти функции?

Задача 9,6 (для самостоятельного решения). Найти функцию, обратную функции $y = x^3$, и построить ее график, пользуясь свойством графика обратной функции.

Задача 9,7 (для самостоятельного решения). Определить функции, обратные следующим функциям:

1) $y = x^2 - 2x + 4$; 2) $y = \frac{x-1}{2-3x}$; 3) $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$;

4) $y = 5^{\lg x}$; 5) $y = 3^{\sin x}$; 6) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Указание. Заданную функцию 1) рассмотреть сначала для значений $x \geqslant 1$, а потом для значений $x \leqslant 1$.

Ответ. 1) $y = 1 + \sqrt{x-3}$, $y = 1 - \sqrt{x-3}$ $(x \geqslant 3)$;

2) $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, область существования — два бесконечных интервала: $\left(-\infty < x < -\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3} < x < +\infty\right)$;

3) $y = \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1}$, область существования — интервалы $(0 < x < 2)$ и $(2 < x < +\infty)$;

4) $y = 10^{\frac{\lg x}{\lg 5}}$, область существования — $(0 < x < +\infty)$;

5) $y = \arcsin \frac{\lg x}{\lg 3}$, $\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\right)$;

6) $y = \frac{1}{2} \arccos x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные сведения из теории

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, отличное от нуля, что для всех значений x, принадлежащих области существования функции, выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$.*

Обыкновенно наименьшее из чисел T, обладающее таким свойством, называется периодом функции.

Если T — период функции, то ее периодом будут также и числа kT, где k — любое целое число.

Из определения периодической функции следует, что если точка x принадлежит области определения функции, то ей принадлежат также и точки $x + kT$, где k — любое целое число $(k = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3; \ldots)$.

Построение графика периодической функции облегчается тем, что можно ограничиться построением его части только для тех точек области определения функции, которые находятся на полу-

отрезках $[x_0, x_0+T)$ *или* $(x_0, x_0+T]$, *и последующим периодическим повторением построенной части графика**.

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sec x$ *и* $y=\operatorname{cosec} x$ *имеют период* $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\sec(x+2\pi)=\sec x$, $\operatorname{cosec}(x+2\pi)=\operatorname{cosec} x$.

Кроме числа 2π *периодом этих функций являются также и числа вида* $2\pi k$, *где* k — *любое целое число. Число* 2π — *наименьший период этих функций.*

Функции же $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *имеют период* $T=\pi$.

Число π *являеся наименьшим периодом этих функций. Вообще же периодом этих функций являются числа вида* πk, *где* k — *любое целое число.*

Задача 9,8. Доказать, что функция $y=\sin(\omega x+\varphi)$, где ω и φ — действительные числа и $\omega\neq 0$, имеет наименьший период $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Прибавим к аргументу x данной функции число $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $\left(\text{здесь следует уяснить, что } \frac{2\pi}{\omega} \text{ прибавляется не к } \omega x, \text{ а к } x\right)$ и покажем, что функция от этого своей величины не изменит. Этим мы и докажем, что число $\frac{2\pi}{\omega}$ является периодом этой функции:

$$\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+2\pi+\varphi)=$$
$$=\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=\sin(\omega x+\varphi).$$

Таким образом, требуемое доказано.

Следует запомнить, что функция $\sin\omega x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $(\omega\neq 0)$. Примеры:

1) функция $y=\sin\frac{x}{3}$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$;

2) функция $y=\sin 2x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$;

3) функция $y=\sin 4x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Задача 9,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что если функция $f(x)$ имеет наименьший период, равный T, то функция $f(ax)$, где a — любое действительное, не равное нулю число, имеет наименьший период $T_1=\frac{T}{a}$ (предполагается, что точки x и ax принадлежат области определения функции).

Указание. Использовать определение периодической функции.

---

* Здесь x_0 — произвольная точка области определения функции, а T — период функции.

Задача 9,10 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $y = \cos^2 x$ имеет период $T = \pi$.

Задача 9,11. Показать, что если функции u и v — периодические функции x с одним и тем же периодом T, то и $u + v$, uv и $\frac{u}{v}$ периодические функции с тем же периодом.

Указание. Удобно, например, ввести обозначение

$$\varphi(x) = u(x) \pm v(x); \quad \varphi(x + T) = u(v + T) \pm v(x + T)$$

и использовать свойство периодичности данных функций: $u(x + T) = u(x)$; $v(x + T) = v(x)$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если функция рассматривается только при целых и положительных значениях аргумента, то она называется функцией натурального аргумента. Множество ее значений образует числовую последовательность: каждому целому положительному числу соответствует число x_n — член последовательности, имеющий номер n. Это значит, что

$$x_n = f(n).$$

Определение. *Числовой последовательностью называется множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел.*

Член x_n называется общим членом последовательности.

Последовательность с общим членом x_n содержит бесконечное множество чисел и обозначается $\{x_n\}$.

Последовательность считается заданной, если дан способ вычисления любого ее члена по его известному номеру.

Задача 10,1. Зная общий член последовательности $x_n = n$, написать ее первые десять членов.

Решение. Давая n значения 1, 2, 3, ... , 10, получим:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 2, \; x_3 = 3; \; x_4 = 4; \; x_5 = 5; \; x_6 = 6;$$
$$x_7 = 7; \quad x_8 = 8; \quad x_9 = 9; \quad x_{10} = 10.$$

Эта последовательность из 10 членов запишется так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = n$ запишется так: 1, 2, 3, ... n, . . .

Задача 10,2. Написать первые десять членов последовательности, если ее общий член $x_n = \frac{n}{n+2}$.