**Задача 9,10** (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $y = \cos^2 x$ имеет период $T = \pi$.

**Задача 9,11.** Показать, что если функции $u$ и $v$ — периодические функции $x$ с одним и тем же периодом $T$, то и $u + v$, $uv$ и $\frac{u}{v}$ периодические функции с тем же периодом.

**Указание.** Удобно, например, ввести обозначение

$$\varphi(x) = u(x) \pm v(x); \quad \varphi(x + T) = u(v + T) \pm v(x + T)$$

и использовать свойство периодичности данных функций: $u(x + T) = u(x)$; $v(x + T) = v(x)$.

## ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Последовательности.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

*Если функция рассматривается только при целых и положительных значениях аргумента, то она называется функцией натурального аргумента. Множество ее значений образует числовую последовательность: каждому целому положительному числу соответствует число $x_n$ — член последовательности, имеющий номер $n$. Это значит, что*

$$x_n = f(n).$$

***Определение.*** *Числовой последовательностью называется множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел.*

*Член $x_n$ называется общим членом последовательности.*

*Последовательность с общим членом $x_n$ содержит бесконечное множество чисел и обозначается $\{x_n\}$.*

*Последовательность считается заданной, если дан способ вычисления любого ее члена по его известному номеру.*

**Задача 10,1.** Зная общий член последовательности $x_n = n$, написать ее первые десять членов.

**Решение.** Давая $n$ значения 1, 2, 3, ... , 10, получим:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 2, \; x_3 = 3; \; x_4 = 4; \; x_5 = 5; \; x_6 = 6;$$
$$x_7 = 7; \quad x_8 = 8; \quad x_9 = 9; \quad x_{10} = 10.$$

Эта последовательность из 10 членов запишется так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = n$ запишется так: 1, 2, 3, . . . . $n$, . . .

**Задача 10,2.** Написать первые десять членов последовательности, если ее общий член $x_n = \frac{n}{n+2}$.

**Решение.** Вычисляя значение дроби $\frac{n}{n+2}$ при значениях $n$, равных 1, 2, 3, ..., 10, получим:

$$x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2}{4};\ x_3 = \frac{3}{5};\ x_4 = \frac{4}{6};\ x_5 = \frac{5}{7};\ x_6 = \frac{6}{8};$$
$$x_7 = \frac{7}{9};\ x_8 = \frac{8}{10};\ x_9 = \frac{9}{11};\ x_{10} = \frac{10}{12}.$$

Вообще же последовательность с общим членом $x = \frac{n}{n+2}$ запишется так:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{n}{n+2}, \ldots$$

**Задача 10,3** (для самостоятельного решения). Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n = \frac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n = n!$ 3) $x_n = \frac{1}{n}$;

4) $x_n = -2^n$; 5) $x_n = \frac{1}{2^n}$; 6) $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n = \frac{\frac{\sin n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ для } n \text{ нечетных;} \\ \frac{n}{n+1} \text{ для } n \text{ четных;} \end{cases}$ 10) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

**Задача 10,4.** По данным первым членам последовательности

$$\frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{30}{31}, \ldots$$

написать ее общий член.

**Решение.** Прежде всего отметим, что заданием нескольких первых членов последовательности не определяется вся последовательность. Однако условимся считать, что как написанные члены последовательности, так и все следующие за ними составлены по одному и тому же закону соответствия между натуральными числами и членами последовательности.

В нашем случае нетрудно усмотреть, что числитель каждой дроби равен квадрату номера плюс пять, т. е. $n^2 + 5$, а знаменатель каждой дроби на единицу больше числителя, т. е. равен $n^2 + 6$. Итак,

$$x_n = \frac{n^2+5}{n^2+6}.$$

**Задача 10,5** (для самостоятельного решения). Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \ldots;$

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{5\cdot 6}, \frac{1}{7\cdot 8}, \frac{1}{9\cdot 10}, \ldots;$

3) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \ldots;$

4) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots;$

6) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots;$

7) $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \ldots.$

**Ответ.** 1) $x_n = \frac{1}{3n}$; 2) $x_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$;

3) $x_n = \frac{3n-2}{5n+1}$; 4) $x_n = \frac{4n-1}{3n+2}$; 5) $x_n = \frac{1}{3^n}$;

6) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; 7) $x_n = \frac{3n^2}{4n^2+1}$.

## Монотонные последовательности

*Последовательность называется монотонно возрастающей, если при всех n каждый ее член больше предшествующего, т. е. если* $x_{n+1} > x_n$, *и монотонно убывающей, если каждый ее член меньше предшествующего, т. е. если* $x_{n+1} < x_n$.

Примеры монотонных последовательностей:

1) Последовательность натуральных чисел

$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — монотонно возрастающая.

2) Последовательность чисел $x_n = \frac{1}{n}$, обратных натуральным,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ — монотонно убывающая.

*Если переменная величина* $x_n$ *изменяется не монотонно, то ее называют колеблющейся.*

## Ограниченные последовательности

*Последовательность называется ограниченной, если все ее члены находятся в конечном интервале* $(-M, +M)$ *и* $M > 0$, *т. е., если* $|x_n| < M$ *для любого номера n.*

Примеры ограниченных последовательностей:

1) Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n$ есть $n$-й десятичный знак числа $\sqrt{5}$, ограничена, так как $|x_n| \leqslant 9$.

2) Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ограничена, так как $|x_n| < 1$.

**Замечание.** Ограниченная последовательность не обязательно монотонна, а монотонная последовательность не обязательно ограничена.

Последовательность с общим членом $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, в которой $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ... ограничена, но не монотонна, а последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... $n$, ... монотонна, но не ограничена.

**Задача 10,6** (для самостоятельного решения). Привести примеры:

1) возрастающей ограниченной последовательности;
2) возрастающей неограниченной последовательности:
3) убывающей ограниченной последовательности;
4) убывающей неограниченной последовательности.

**Задача 10,7.** Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ — монотонно возрастающая.

**Решение.** Найдем $x_{n+1}$, заменив $n$ на $(n+1)$ в выражении $x_n$:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Сравним величину дробей $x_n = \frac{n}{2n+1}$ и $x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$, для чего приведем эти дроби к большему знаменателю:

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n = \frac{n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Теперь знаменатели дробей равны.

Числитель первой дроби равен $2n^2 + 3n + 1$, а числитель второй дроби $2n^2 + 3n$ и ясно, что $2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$. Мы знаем, что из двух положительных дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше. Значит, $x_{n+1} > x_n$ и данная последовательность — возрастающая.

**Задача 10,8** (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{4n-3}$ — монотонно убывающая, а с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$ — монотонно возрастающая.

**Задача 10,9** (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}$ — ограниченная и монотонно возрастающая, а последовательность $\left\{\frac{2^n+1}{2^n}\right\}$ — ограниченная и монотонно убывающая.

**Задача 10,10** (для самостоятельного решения). Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2^n$ — неограниченная и монотонно возрастающая.

## ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел последовательности.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с определением понятия предела последовательности. Отыскивать предел последовательности на этом занятии не придется.

В задачах предел последовательности будет задан, а учащийся на основании определения предела последовательности должен доказать, что заданное число действительно является пределом этой последовательности.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

#### Определение предела последовательности

*Число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$*

$$x_1\ x_2\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \ldots \tag{11,1}$$

*(пределом переменной $x_n$ или пределом функции $f(n)$), если каково бы ни было наперед заданное положительное число $\varepsilon$, всегда можно найти такое натуральное число $N$*, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{11,2}$$

Это неравенство равносильно таким двум неравенствам:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Число $N$ зависит, вообще говоря, от выбранного $\varepsilon$.

Если уменьшить число $\varepsilon$, то соответствующий ему номер $N$ увеличится.

*Для последовательности (или для переменной $x_n$) необязательно иметь предел, но если этот предел есть, то он единственный.*

Если число $a$ есть предел последовательности $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = f(n)$ или переменной величины $x_n$, то это символически записывается так:

$$\lim x_n = a. \tag{11,3}$$

Вместо записи (11,3) употребляется также запись

$$x_n \to a,$$

которая читается так: «$x_n$ стремится к $a$».

* Натуральными числами называются все целые положительные числа.