Задача 10,10 (для самостоятельного решения). Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2^n$ — неограниченная и монотонно возрастающая.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел последовательности.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с определением понятия предела последовательности. Отыскивать предел последовательности на этом занятии не придется.

В задачах предел последовательности будет задан, а учащийся на основании определения предела последовательности должен доказать, что заданное число действительно является пределом этой последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение предела последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$

$$x_1\ x_2\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \ldots \tag{11,1}$$

(пределом переменной x_n или пределом функции $f(n)$), если каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, всегда можно найти такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{11,2}$$

Это неравенство равносильно таким двум неравенствам:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Число N зависит, вообще говоря, от выбранного ε.

Если уменьшить число ε, то соответствующий ему номер N увеличится.

Для последовательности (или для переменной x_n) необязательно иметь предел, но если этот предел есть, то он единственный.

Если число a есть предел последовательности $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = f(n)$ или переменной величины x_n, то это символически записывается так:

$$\lim x_n = a. \tag{11,3}$$

Вместо записи (11,3) употребляется также запись

$$x_n \to a,$$

которая читается так: «x_n стремится к a».

* Натуральными числами называются все целые положительные числа.

В том случае, когда переменная величина x_n (последовательность (11,1) имеет предел, равный a, говорят, что эта переменная величина или что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Последовательность, не имеющую предела, называют расходящейся.

Переменная величина x_n может стремиться к своему пределу различными способами: 1) оставаясь меньше своего предела, 2) оставаясь больше своего предела, 3) колеблясь около своего предела и 4) принимая значения, равные своему пределу.

Выбор числа ε произволен, но после того как оно выбрано, никаким изменениям в дальнейшем оно не должно подвергаться

Задача 11, 1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

Решение. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно определить такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a = 1$; $x_n = \frac{n}{n+1}$, т. е. неравенство

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon. \qquad (11,4)$$

После приведения в скобках к общему знаменателю получим

$$\left|\frac{n+1-n}{n+1}\right| < \varepsilon, \text{ или } \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

Но если $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$, то и $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$*, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Значит, если номер N больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, то неравенство (11,4) будет выполняться. Теперь надо решить вопрос о числе N, о котором идет речь в определении. За число N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Наибольшее целое число, содержащееся в числе x, обозначается знаком $E(x)$.

На основании этого наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, надо обозначить так: $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.

Итак, можно принять

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \qquad (11,5)$$

---

* Если $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)>0$, иначе N не будет натуральным и его надо брать равным 1).

Заключение: По произвольно заданному положительному числу ε мы нашли такое натуральное число N, что для всех номеров $n>N$ неравенство (11,4) действительно выполняется, а этим и доказано, что 1 является пределом последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{n}{n+1}.$$

Теперь приведенные вычисления проиллюстрируем числовым примером.

Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$. Тогда при $\varepsilon=\frac{1}{100}$ получаем из (11,5)

$$N=E\left(\frac{1}{\frac{1}{100}}-1\right)=E(100-1)=99;\ N=99.$$

Таким образом, для членов последовательности с номером бо́льшим, чем 99, выполняется неравенство

$$|1-x_n|<\frac{1}{100}, \tag{11,6}$$

Пусть $n=97$; тогда, так как $x_n=\frac{n}{n+1}$, $x_{97}=\frac{97}{98}$,

$$\left|1-\frac{97}{98}\right|=\frac{1}{98},\ \text{а}\ \frac{1}{98}>\frac{1}{100};$$

если $n=98$, то

$$x_{98}=\frac{99}{99},\ \text{и}\ \left|1-\frac{98}{99}\right|=\frac{1}{99};\ \frac{1}{99}>\frac{1}{100}.$$

Из этих расчетов видно, что когда номер n члена последовательности меньше 99 ($n=97$, $n=98$), неравенство (11,6) не выполняется: вместо того чтобы $|1-x_n|$ была меньше $\frac{1}{100}$, мы получили, что $|1-x_n|>\frac{1}{100}$. Если взять $n>99$, т. е., например, $n=100$, тогда $x_n=\frac{100}{101}$ и $|1-x_n|=\left|1-\frac{100}{101}\right|=\left|\frac{101-100}{101}\right|=\frac{1}{101}$, а $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$. Неравенство (11,6) будет выполняться для всех номеров n, которые больше, чем 99. Так как $\varepsilon=\frac{1}{100}$, а $n>99$, то все члены последовательности, начиная с сотого, будут лежать на интервале $\left(1-\frac{1}{100},\ 1+\frac{1}{100}\right)$, т. е. на интервале (0,99; 1,01) (теперь возьмите для ε значение, меньшее $\frac{1}{100}$, например, $\varepsilon=\frac{1}{1000}$. Найдите N и убедитесь, что оно увеличится).

Полученный результат можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Иначе можно сказать, что последовательность $\{x_n\}=\frac{n}{n+1}$ сходится к 1.

Мы употребили запись $n\to\infty$, которую следует понимать так: переменная величина n становится все большей и большей и не существует предела для ее возрастания.

Какое бы большое число мы не задали, n в процессе своего возрастания его превзойдет. Для того чтобы коротко описать этот характер изменения n, принято говорить «n стремится к бесконечности» и записывать это так: $n\to\infty$. Символ ∞ произносится «бесконечность» и применяется для сокращенной записи слова «бесконечность».

Символ ∞ ни в коем случае не может рассматриваться как число, а потому бессмысленной является запись $n=\infty$, так как n может равняться числу и не может быть равно символу, введенному только для сокращенной записи и сокращенного произношения фразы, которой заранее был придан определенный, указанный выше, смысл.

Очевидно, что последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ может быть записана так:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{90}{100},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

и легко усмотреть, что она стремится к своему пределу 1, возрастая и оставаясь меньше 1.

Задача 11, 2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{4n}{2n+1}$ имеет предел, равный 2.

Решение. Повторим подробно все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно подобрать такое число N, что для всех значений номера n, больших этого числа N, будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a=2$, $x_n=\frac{4n}{2n+1}$, т. е. будет выполняться неравенство

$$\left|2-\frac{4n}{2n+1}\right|<\varepsilon. \qquad (11,7)$$

Из этого неравенства после приведения в скобках к общему знаменателю получаем

$$\left|2-\frac{4n}{2n+1}\right|=\left|\frac{4n+2-4n}{2n+1}\right|=\left|\frac{2}{2n+1}\right|=\frac{2}{2n+1},$$

и неравенство (11,7) запишется так: $\frac{2}{2n+1}<\varepsilon$.

Отсюда следует, что $\frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ (см. сноску на стр. 65) или $n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$.

Таким образом, если номер n больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то неравенство (11,7) будет выполняться.

За N примем наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, т. е.

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right). \tag{11,8}$$

Таким образом, мы сумели по произвольно заданному положительному ε определить такое натуральное N, что неравенство (11,7) выполняется для всех номеров $n > N$. Этим и доказано, что 2 есть предел последовательности с общим членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ (предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) > 0$, так как иначе N не будет натуральным числом. Если $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)$ окажется отрицательным, то следует взять $N = 1$).

Теперь, чтобы лучше уяснить приведенные рассуждения, приведем числовой пример: пусть выбрано $\varepsilon = \frac{1}{50}$. Тогда из (11,8) следует, что

$$N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{50}} - \frac{1}{2}\right) = E\left(50 - \frac{1}{2}\right) = 49,$$

так как наибольшее целое число содержащееся в $49\frac{1}{2}$, есть 49. Значит, для всех номеров n, больших, чем 49 при $\varepsilon = \frac{1}{50}$, неравенство (11,7) будет выполняться. Начиная с пятидесятого члена на все члены последовательности будут лежать в интервале $\left(2 - \frac{1}{50},\ 2 + \frac{1}{50}\right)$, т. е. в интервале (1,98; 2,0 2). Убедимся сначала, что при $n < 49$ неравенство (11,7) не выполняется. Пусть, например, $n = 47$. Тогда, так как $x_n = \frac{4n}{2n+1}$, получим, что $x_{47} = \frac{4 \cdot 47}{2 \cdot 47 + 1} = \frac{188}{45}$ и левая часть неравенства (11,7) $\left|2 - \frac{188}{95}\right| = \frac{2}{95}$. На основании (11,7) $\frac{2}{45}$ должно быть меньше, чем $\varepsilon = \frac{1}{50}$, а фактически $\frac{2}{95}$ не меньше $\frac{1}{50}$, а больше $\frac{1}{50}$ и, значит, неравенство (11,7) не выполняется.

При $n = 48$ имеем $x_n = \frac{4 \cdot 48}{2 \cdot 48 + 1} = \frac{192}{97}$; $\left|2 - \frac{192}{97}\right| = \frac{2}{97}$ и опять неравенство (11,7) не выполняется, т. к. и $\frac{2}{97} > \frac{1}{50}$, а не меньше $\frac{1}{50}$.

Если же взять, например, $n = 50$, то $x_n = \frac{200}{101}$ и $\left|2 - \frac{200}{101}\right| = \frac{2}{101}$, а $\frac{2}{101} < \frac{1}{50}$, и неравенство (11,7) выполнено. Так будет и для всех номеров n, которые больше, чем 49.

Теперь примите, за ε число, меньшее, чем $\frac{1}{50}$, например $\frac{1}{200}$, и убедитесь, что N увеличится.

Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$ (можно сказать иначе: последовательность $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ сходится к 2).

Замечание 1. В решенных двух задачах мы находили наименьший номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, такой, что начиная с него, неравенство (11,2) выполняется. Однако учащийся должен уяснить, что 1) если это неравенство выполняется, начиная с номера N, то оно будет выполняться и подавно при всех номерах N_1, больших, чем N; 2) заданием числа ε номер N определяется неоднозначно и 3) для доказательства того, что $\lim x_n = a$, вовсе нет необходимости среди всех номеров N искать наименьший. Так, в задаче 11,1, установив, что неравенство (11,4) выполняется для всех $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, мы могли дальше не вести никаких рассуждений.

Замечание 2. Выше было указано, что если последовательность имеет предел, то этот предел — единственный: двух различных пределов последовательность иметь не может.

В последней задаче мы доказали, что пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ является 2.

Покажем, что, например, число 3 не может быть пределом этой последовательности.

Рассмотрим абсолютную величину разности

$$\left|3 - \frac{4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{6n + 3 - 4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{2n+3}{2n+1}\right| = \frac{2n+3}{2n+1}$$

и решим относительно n неравенство $\frac{2n+3}{2n+1} < \varepsilon$.

При любом целом и положительном n (а номер n может быть только числом целым и положительным) число $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$, а поэтому оно не может быть меньше **произвольно** заданного положительного числа ε. Этим мы показали, что число 3 не может служить пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$.

Теперь самостоятельно решите простую задачу.

Задача 11, 3 (для самостоятельного решения). Доказать, что переменная $x_n = \frac{1}{n}$ имеет предел, равный нулю (следует запомнить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$).

Произносится эта запись так: «предел $\frac{1}{n}$, когда n стремится к бесконечности, равен нулю». Вместо того чтобы писать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, можно употребить запись $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, которую следует читать так: «$\frac{1}{n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности». Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$1+\frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty, \quad 1-\frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 11, 4. Доказать, что последовательность $q, q^2, q^3, \ldots, q^n \ldots$ сходится к нулю, если абсолютная величина q меньше 1, т. е. если $|q| < 1$.

Решение. Чтобы доказать требуемое, возьмем произвольное положительное число ε и убедимся, что можно будет определить такое N, что для всех номеров n, больших N, будет выполняться неравенство

$$|0 - q^n| < \varepsilon \tag{11,9}$$

(в неравенстве (11,2) надо взять $a = 0$, $x_n = q^n$).

Учитывая, что по условию $|q| < 1$ можно заключить, что $\frac{1}{|q|} > 1$, т. е. можно полагать, что $\frac{1}{|q|}$ равно $1+\alpha$, где α — число положительное.

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n;$$

$$1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n \geqslant 1 + n\alpha,$$

а потому $\frac{1}{|q|^n} \geqslant 1 + n\alpha$, или $|q|^n \leqslant \frac{1}{1+n\alpha}$.

Выберем n так, чтобы знаменатель дроби $1 + n\alpha$ стал больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда окажется, что и подавно $|q|^n < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$, т. е. $|q^n| < \varepsilon$, и неравенство (11,9) будет выполняться, так как из него следует,

что $|q|^n < \varepsilon$. Но если $1 + n\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$, то $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$. Значит можно в качестве N выбрать наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$, т. е. взять $N = E\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\right)$, и при этом неравенство (11,9) будет выполняться при всех номерах $n > N$. Таким образом доказано, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Надо запомнить, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ ($\lim\limits_{n \to \infty} q^n$, когда $|q| \geqslant 1$ вычислен в задаче 13, 1).

Если, например, $q = \frac{1}{3} < 1$, то последовательность запишется так: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots \frac{1}{3^n} \ldots$, и переменная $\frac{1}{3^n} \to 0$, монотонно убывая (здесь каждое следующее значение переменной меньше предыдущего).

Если $q = -\frac{1}{2}$, то последовательность запишется так:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$$

И эта последовательность, как доказано, сходится к нулю ($|q| < 1$). Однако здесь уже переменная величина $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ стремится к своему пределу — нулю, принимая значения, то меньшие нуля, то бо́льшие его. Можно сказать, что переменная в данном случае колеблется около нуля.

Запишем эту последовательность в виде

$$-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, 0, \ldots$$

Ясно, что и эта последовательность сходится к нулю, но теперь она содержит бесконечное множество членов, равных нулю. Это тот случай, когда переменная, стремясь к пределу, становится равной ему, причем это имеет место бесконечное множество раз.

Задача 11, 5. Доказать, что последовательность $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n \ldots$ не имеет предела.

Решение. Мы докажем требуемое, если установим, что общий член этой последовательности $x_n = 3^n$ превзойдет любое наперед заданное число.

Пусть A такое число. Возьмем $n > A - 1$. Тогда $n + 1 > A$; $3^n = (1 + 2)^n \geqslant 1 + 2n$, и подавно $3^n > n + 1$, или $3^n > A$. Тем самым показано, что 3^n может превзойти любое число A. Если бы существовал предел переменной $x_n = 3^n$, и был бы равен a, то для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы подобрать такое N, что при номерах $n > N$ выполнялись бы неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е.

$a-\varepsilon<3^n<a+\varepsilon$, а это противоречит доказанному, так как 3^n при $n>A-1$ превзойдет любое число A, а тем самым и число $a+\varepsilon$, меньше которого оно должно оставаться. Это противоречие и доказывает, что последовательность $\{3^n\}$ предела не имеет. Этот пример иллюстрирует утверждение: **не всякая последовательность имеет предел.**

Задача 11, 6. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ имеет предел $a=1$.

Решение. Подставим значения a и x_n в неравенство (11,2) и получим

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|<\varepsilon. \qquad (11,10)$$

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1-\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=$$

$$=\left|\frac{-2}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1}.$$

Вместо неравенства (11,10) теперь имеем неравенство $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1}<\varepsilon$. Решим это неравенство относительно n:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon},\ \sqrt{n^2+1}-1>\frac{2}{\varepsilon},\ \sqrt{n^2+1}>\frac{2}{\varepsilon}+1;$$

$$n^2+1>\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2;\ n>\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}.$$

Таким образом, если n удовлетворяет последнему неравенству, то неравенство (11,10) будет выполняться при любом $\varepsilon>0$. Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}=1$, а за N можно принять $N=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}\right)$.

Определим из этого равенства значение N при $\varepsilon=0{,}01$ и $\varepsilon=0{,}001$. Если $\varepsilon=0{,}01$, то $N=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{0{,}01}+1\right)^2-1}\right)=$ $=E\left(\sqrt{201^2-1}\right)=200$.

Значит, при всех номерах $n>200$ будет выполняться неравенство $\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|<0{,}01$, т. е. при $n>200$ все числа заданной последовательности будут лежать на интервале (0,99; 1,01). Если $\varepsilon=0{,}001$, то $N=E\left(\sqrt{2001^2-1}\right)=E\left(\sqrt{4\,04\,000}\right)=2000$ и

для всех членов последовательности с номерами $n > 2000$ будет выполняться неравенство $\left|1 - \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < 0{,}001$, а для номеров $n > 2000$ все члены последовательности будут лежать на интервале (0,999; 1,001).

Задача 11, 7 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-2} = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2-1} = 0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1} = \frac{1}{2}$.

Задача 11, 8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2} = \frac{1}{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$.

Задача 11, 9 (для самостоятельного решения). Составить последовательности: 1) возрастающую и сходящуюся к нулю; 2) убывающую и сходящуюся к 3; 3) колеблющуюся и сходящуюся к 1; 4) колеблющуюся и расходящуюся; 5) убывающую и расходящуюся.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Дальнейшие упражнения в определении предела последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущем занятии мы задавали число и проверяли, является ли оно пределом переменной величины x_n (последовательности $\{x_n\}$).

Теперь мы займемся отысканием числа, являющегося пределом переменной величины (последовательности).

Вычисление предела переменной величины основывается на определениях и теоремах, помещенных ниже.

Бесконечно малые величины

12, 1. *Если переменная величина x_n имеет своим пределом нуль $\lim x_n = 0$, то она называется бесконечно малой. Это же определение можно высказать и в другой формулировке:*