для всех членов последовательности с номерами $n > 2000$ будет выполняться неравенство $\left|1 - \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < 0{,}001$, а для номеров $n > 2000$ все члены последовательности будут лежать на интервале (0,999; 1,001).

Задача 11, 7 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-2} = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2-1} = 0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1} = \frac{1}{2}$.

Задача 11, 8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2} = \frac{1}{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$.

Задача 11, 9 (для самостоятельного решения). Составить последовательности: 1) возрастающую и сходящуюся к нулю; 2) убывающую и сходящуюся к 3; 3) колеблющуюся и сходящуюся к 1; 4) колеблющуюся и расходящуюся; 5) убывающую и расходящуюся.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Дальнейшие упражнения в определении предела последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущем занятии мы задавали число и проверяли, является ли оно пределом переменной величины x_n (последовательности $\{x_n\}$).

Теперь мы займемся отысканием числа, являющегося пределом переменной величины (последовательности).

Вычисление предела переменной величины основывается на определениях и теоремах, помещенных ниже.

Бесконечно малые величины

12, 1. *Если переменная величина x_n имеет своим пределом нуль $\lim x_n = 0$, то она называется бесконечно малой. Это же определение можно высказать и в другой формулировке:*

Переменная величина x_n называется бесконечно малой, если для всякого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех номеров n, которые больше N.

Ни одно число, кроме нуля, не может быть отнесено к бесконечно малым величинам.

12,2. *Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая. (Алгебраической суммой называется такая сумма, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус).*

12, 3. *Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

12, 4. *Произведение ограниченной переменной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Отсюда следует:

A. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть также бесконечно малая величина.

B. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

C. Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

12, 5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых величин часто называется также раскрытием «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$.

Бесконечно большие величины

12, 6. *Переменная величина x_n называется бесконечно большой, если для любого наперед заданного числа $M > 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > M$. Короче: переменная величина x_n называется бесконечно большой, если, начиная с некоторого номера, она становится и остается при всех последующих номерах по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа M. Если x_n есть величина бесконечно большая, то это записывается так:* $\lim x_n = \infty$, *или* $x_n \to \infty$.

Следует обратить внимание, что из определения бесконечно большой величины следует, что знак x_n роли не играет, а требуется лишь, чтобы абсолютная величина x_n, т. е. $|x_n|$, могла быть сделана больше любого наперед заданного положительного числа.

Бесконечно большая величина x_n называется ***положительной бесконечно большой*** *величиной, если, начиная с некоторого номера, она становится положительной. В этом случае уже нет надобности писать $|x_n| > M$, знак абсолютной величины (прямые скобки) можно опустить и писать $x_n > M$. В случае, когда x_n — положительная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = +\infty$, или $x_n \to +\infty$, и произносят: «x_n стремится к плюс бесконечности».*

12, 7. *Переменная величина x_n называется* ***отрицательной бесконечно большой*** *величиной, если для любого числа $M < 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n больших N, выполняется неравенство $x_n < M$. В случае, когда x_n — отрицательная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = -\infty$, или $x_n \to -\infty$, и произносят «x_n стремится к минус бесконечности»*

12, 8. *Надо помнить, что символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ отнюдь не являются числами, а вводятся только для упрощения записи и для сокращенного словесного выражения того факта, что переменная величина является бесконечно большой, положительной бесконечно большой и отрицательной бесконечно большой. Следует твердо запомнить, что никаких арифметических действий над этими символами производить нельзя.*

12, 9. *Бесконечная большая величина предела не имеет.*

12, 10. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно малой величины, есть величина бесконечно большая.*

12, 11. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно большой величины, есть величина бесконечно малая* (хотя в некоторых учебниках и применяются условные записи $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$, но их следует **всячески избегать**, так как 1) делить на нуль запрещено, 2) делить же на ∞ тоже нельзя, ибо ∞ не число, а символ, делить же на символы бессмысленно).

12, 12. *Если A постоянная величина,* ***не равная нулю, то*** *произведение A на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.*

12, 13. *Произведение двух бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.*

12, 14. *Отношение бесконечно большой величины к бесконечно малой есть величина бесконечно большая.*

12, 15. *Сумма двух бесконечно больших величин одинакового знака есть бесконечно большая величина того же знака.*

12, 16. Отношение двух бесконечно больших величин не обязательно есть бесконечно большая величина.

Это отношение может быть 1) величиной бесконечно большой, 2) величиной конечной и даже 3) величиной бесконечно малой

(см. задачи 12,1—12,9). Об отношении двух бесконечно больших величин говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$, а отыскание этого отношения называется «раскрытием неопределенности».

Действия над сходящимися последовательностями

12, 17. *Последовательности складываются, вычитаются или умножаются путем сложения, вычитания или умножения их соответствующих членов. Если есть две последовательности:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots, \qquad \{a_n\}$$

и

$$b_0,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_n,\ \ldots, \qquad \{b_n\}$$

то получим их сумму в виде

$$(a_1+b_1),\ (a_2+b_2),\ (a_3+b_3),\ \ldots,\ (a_n+b_n),\ \ldots,\ \{a_n\}+\{b_n\}$$

разность в виде

$$(a_1-b_1),\ (a_2-b_2),\ (a_3-b_3),\ \ldots,\ (a_n-b_n)\ \ldots,\ \{a_n\}-\{b_n\}$$

а их произведение в виде

$$(a_1\,b_1),\ (a_2\,b_2),\ (a_2\,b_3),\ \ldots,\ (a_n\,b_n),\ \ldots \qquad \{a_n\}\cdot\{b_n\}$$

Частное от деления двух последовательностей получим как частное от деления членов последовательности $\{a_n\}$ на соответствующие члены последовательности $\{b_n\}$ при условии, что в последовательности $\{b_n\}$ нет членов, равных нулю.

Предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей

12, 18. *Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, равные соответственно a и b, то:*

А) Последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ имеет предел, равный $a \pm b$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

Это свойство распространяется также на случай любого фиксированного числа слагаемых.

В) Последовательность $\{x_n\,y_n\}$ имеет предел, равный ab, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab.$$

Это свойство распространяется также на случай любого фиксированного числа сомножителей.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *при любом постоянном* k.

C) Последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *имеет предел, равный* $\frac{a}{b}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

при условии, что все y_n *не равны нулю и* $\lim y_n = b \neq 0$.

Теоремы о последовательностях, расходящихся к $\pm\infty$

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к плюс бесконечности.*

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к минус бесконечности. Символы* $+\infty$ *и* $-\infty$ *имеют смысл, о котором было сказано в п. 12,8.*

12, 19. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена, а последовательность* $\{y_n\}$ *расходится к* $+\infty$: $\lim y_n = +\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ *для всех* n.

12, 20. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *расходятся к плюс бесконечности:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

12, 21. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = -\infty$.

12, 22. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a \neq 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *и* a — *действительное число, а не один из символов* $+\infty$ *или* $-\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0; \\ -\infty, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

12, 23. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,(a \neq 0)$, *а* $\lim y_n = 0$ *и* $y_n > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0; \\ -\infty, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Теоремы о предельном переходе

12, 24. *Если переменная x_n (последовательность $\{x_n\}$) имеет конечный предел, то для любого действительного α имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^\alpha) = (\lim_{n\to\infty} x_n)^\alpha \tag{12, 1}$$

в предположении, что степени x_n^α $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^n$ имеют смысл. Короче: можно переходить к пределу в основании степени с любым действительным показателем.

12, 25. *Если переменная x_n имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n}, \tag{12, 2}$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком корня (в случае четного m предполагается, что $x_n \geqslant 0$ и корень берется арифметический).

12, 26. *Если $a > 0$, а x_n принимает только положительные значения и имеет предел, не равный нулю, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty}\log_a x_n = \log_a(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{12, 3}$$

Короче: можно переходить к пределу под знаком логарифма.

12, 27. *Если $a > 0$, а переменная x_n имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}. \tag{12, 4}$$

Короче: при фиксированном основании можно переходить к пределу в показателе степени.

Теперь приступим к решению типовых задач на отыскание предела переменной x_n (предела последовательности $\{x_n\}$).

Задача 12, 1. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1 + 3n + 2n^2}{1 - n^2}. \tag{12, 5}$$

Последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, а значит и последовательность $\{2n^2\}$ расходится к $+\infty$, (п. 12,22). На том же основании последовательность $\{3n\}$ расходится к $+\infty$, а потому последовательность $\{3n + 2n^2\}$ расходится к $+\infty$ и на основании п. 12,19 последовательность $(1 + 3n + 2n^2)$ также расходится к $+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 3n + 2n^2) = +\infty$. Можно было бы рассуждать и иначе: при $n \to \infty$ величина n — бесконечно большая, ее квадрат, как произведение двух бесконечно больших величин, есть величина бесконечно большая (п. 12,13). На основании п. 12,12 про-

изведение $2n^2$ есть бесконечно большая величина, как произведение постоянной, не равной нулю, на бесконечную большую величину.

На том же основании величина $3n$ — бесконечно большая. Так как $3n$ и $2n^2$ — бесконечно большие одного и того же знака, то и сумма их $(3n+2n^2)$ есть величина бесконечно большая того же знака, потому и $1+(3n+2n^2)$ — бесконечно большая величина, как сумма постоянной величины 1 с бесконечно большой и снова $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3n+2n^2)=+\infty$. Что касается знаменателя $1-n^2$, при $n\to\infty$ последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, и на основании п. 12,19, *б* получаем, что последовательность $\{1-n^2\}$ расходится к $-\infty$ и знаменатель дроби (12,5) — тоже бесконечно большая величина.

Таким образом, дробь (11,5) есть отношение двух бесконечно больших величин, о котором без исследования ничего определенного сказать нельзя. Здесь также нельзя применить теорему о пределе частного, так как в условии этой теоремы предполагается, что пределы числителя и знаменателя существуют, а в нашем случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (см. п. 12,9). Данную переменную (12,5) преобразуем, чтобы к ней можно было применить теоремы о пределах. Обыкновенно в этом случае поступают так: числитель и знаменатель дроби делят на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби *. Тогда

$$\frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-1}. \qquad (12,6)$$

Отыскивая теперь предел последней дроби, мы сможем применить теорему о пределе частного, так как теперь числитель и знаменатель дроби имеют пределы: величины $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n}$ есть величины бесконечно малые, как величины обратные бесконечно большим n^2 и n, а потому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Величина $\frac{3}{n}$ есть тоже бесконечно малая, как произведение постоянной величины 3 на бесконечно малую $\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$ (п. 12 4А), и тогда существует предел числителя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}2=0+0+2=2$$

(предел постоянной величины 2 равен ей самой).

* Деление на n допустимо, так как предполагается, что $n\neq 0$.

Предел знаменателя $\frac{1}{n^2}-1$ дроби (12,6) также существует и равен -1, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}1=0-1=-1;\ \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{-1}=-2.$$

После этих подробных рассуждений укажем, как следует расположить записи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}2}=$$

(Здесь применена теорема о пределе дроби. Это можно было сделать только после того, как мы убедились, что существуют пределы числителя и знаменателя).

$$=\frac{0+0+2}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Такие подробные записи в последующем, когда выработается определенный навык, можно сократить.

Задача 12,2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+2n-3}{5n^2-4n+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{5-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=$

(числитель и знаменатель данной дроби разделен на n^2)

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}=\frac{7+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{7}{5}$$

(применена теорема о пределе дроби).

Задача 12,3 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-n+1}{5n^3-4n+17}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-4n+2}{n^3-4n+1}$.

Ответ. 1) $\frac{3}{5}$; 2) 0.

Задача 12, 4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1}.$$

Ответ. Последовательность расходится к $+\infty$. Можно употребить символическую запись и написать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1}=+\infty.$$

Указание. В числителе перемножить двучлены, разделить числитель и знаменатель на n^3 и воспользоваться п. 12,23.

Задача 12, 5 (для самостоятельного решения). Найти предел переменной $x_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{3n^3+n+1}$.

Указание. Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Задача 12, 6 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2-5n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{n^2+n-1}$.

Ответ. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) ∞; 4) 0.

Задача 12, 7. Доказать, что если $n\to\infty$, то 1) $n^k\to+\infty$, когда $k>0$; 2) $n^k\to 0$, когда $k<0$; 3) $n^k\to 1$, когда $k=0$.

Решение. 1) Пусть $k>0$, а M — любое заданное положительное число.

Чтобы доказать, что $n^k\to+\infty$, мы должны показать, что можно найти такое натуральное число N, что $n^k>M$ при $n>N$.

Так как n^k должно быть большим, чем M, то это равносильно тому, что должно быть $n>\sqrt[k]{M}$, и за N можно принять $N>\sqrt[k]{M}$; тем самым доказано, что $n^k\to+\infty$ при $k>0$. Например, если $k=3$, а $M=1000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1000$ для всех $n>N$, причем следует взять $N>\sqrt[3]{1000}$, т. е. принять $N>10$. Значит, начиная с $n=11$, неравенство $n^3>1000$ будет выполняться.

Если взять $M=1\,000\,000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1\,000\,000$, для всех $n>N$, и следует взять $N>\sqrt[3]{1\,000\,000}=100$ $(N>100)$ и при $n>100$, т. е. начиная с $n=101$ неравенство $n^3>1\,000\,000$ будет выполняться.

Доказательство пунктов 2) и 3) предоставляется читателю. При доказательстве п. 2) и 3) выгодно взять $k = -l\ (l > 0)$, и тогда $n^k = \frac{1}{n^l}$; при доказательстве п. 3) учесть, что если $k = 0$, то всегда $n^k = 1$ при любом n.

Результат проведенных вычислений можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k > 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \\ 1, & \text{если } k = 0. \end{cases} \qquad (12,7)$$

В задачах 12, 1—12,6 мы рассматривали пределы отношения двух целых рациональных функций от n в частных случаях. После решения предыдущей задачи мы можем рассмотреть вопрос об отношении двух целых рациональных функций в общем виде.

Задача 12, 8. Найти предел при $n \to \infty$

$$x_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \ldots + b_q}, \qquad (12,8)$$

причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Решение. Перепишем (12, 8) в виде

$$x_n = \frac{n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_q}{n_q}\right)};$$

$$x_n = n^{p-q}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_p}{n^h}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n_2} + \ldots + \frac{b_q}{n^q}}.$$

Теперь предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^{p-q}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \ldots + \frac{b_q}{n^q}}.$$

Предел второго сомножителя равен $\frac{a_0}{b_0}$, так как в числителе и знаменателе предел каждого слагаемого, кроме первых (a_0 и b_0), равен нулю. Что касается первого сомножителя, то его предел зависит от знака разности $p - q$:

1) Если $p - q < 0$, т. е. $p > q$, то на основании (12, 7) $\lim n^{p-q} = +\infty$, и тогда, в соответствии с п. 12, 22, заключаем, что $\lim x_n = +\infty$.

2) Если $p - q < 0$, т. е. $p < q$, то из (12, 7) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q} = 0$; тогда искомый предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3) Если же $p-q=0$, т. е. $p=q$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}=1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$. Соединяя полученные результаты, приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+b_2n^{q-2}+\ldots+b_q}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } p>q;\\ 0, & \text{если } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } p=q.\end{cases} \qquad (12,9)$$

Таким образом, при $n\to\infty$ предел отношения двух целых рациональных функций от n равен 1) отношению коэффициентов при высших степенях n, если степени этих функций между собою равны; 2) нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя и 3) $+\infty$, если степень числителя больше степени знаменателя.

Заключения, полученные при решении задач 12, 1—12, 6, совпадают с только что сделанным.

Задача 12, 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12, 24, заметив, что основание степени имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

Задача 12, 10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-4n^2+5n}{4n^3-2n-7}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{27}{64}$.

Задача 12, 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)$.

Решение. Применяя теорему о пределе произведения (это мы имеем право сделать, так как каждый сомножитель имеет предел) получаем последовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=1\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)\right]^2(-1)=1\cdot 4\cdot(-1)=-4,$$

т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$, ибо если $n\to\infty$, то величина ей обратная $\frac{1}{n}$ — бесконечно малая $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

Задача 12, 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12,27 о переходе к пределу в показателе степени $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)}}=$

$$=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9.$$

Задача 12, 13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}7^{\frac{3n}{6n-5}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}5^{\frac{n-1}{n^2+2}}.$$

Ответ. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

Задача 22, 14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)$.

Решение. На основании формулы (12, 3), допускающей переход к пределу под знаком логарифма, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{5}{n}}\right)=$$

$$=\log_a\frac{3}{6}=\log_a\frac{1}{2}=-\log_a 2.$$

Задача 12, 15 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{3n^2+n-10}.$$

Ответ. $-\lg 3$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение предела последовательности (задачи повышенной трудности).

Задача 13, 1. Найти $\lim q^n$, если 1) $q>1$; 2) $q<-1$, 3) $q=1$; 4) $q=-1$.

Решение. 1) Если $q>1$, то $0<\frac{1}{q}<1$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$ (см. задачу 11, 4 — основание степени $\frac{1}{q}$ по абсолютной величине меньше 1).