т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$, ибо если $n\to\infty$, то величина ей обратная $\frac{1}{n}$ — бесконечно малая $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

Задача 12, 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12,27 о переходе к пределу в показателе степени $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)}}=$

$$=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9.$$

Задача 12, 13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}7^{\frac{3n}{6n-5}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}5^{\frac{n-1}{n^2+2}}.$$

Ответ. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

Задача 22, 14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)$.

Решение. На основании формулы (12, 3), допускающей переход к пределу под знаком логарифма, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{5}{n}}\right)=$$

$$=\log_a\frac{3}{6}=\log_a\frac{1}{2}=-\log_a 2.$$

Задача 12, 15 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{3n^2+n-10}.$$

Ответ. $-\lg 3$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение предела последовательности (задачи повышенной трудности).

Задача 13, 1. Найти $\lim q^n$, если 1) $q>1$; 2) $q<-1$, 3) $q=1$; 4) $q=-1$.

Решение. 1) Если $q>1$, то $0<\frac{1}{q}<1$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$ (см. задачу 11, 4 — основание степени $\frac{1}{q}$ по абсолютной величине меньше 1).

Значит, $\frac{1}{q^n}$ — бесконечно малая величина, а потому обратная ей величина q^n — бесконечно большая величина; так как при $q > 1$ и n, стремящемся к $+\infty$, переменная величина q^n принимает только положительные значения, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

2) Если же $q < -1$, то переменная величина q^n при $n \to +\infty$ делается попеременно то положительной, то отрицательной, неограниченно возрастая по абсолютной величине, а потому

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ если } q < -1.$$

3) Если $q = 1$, то $q^n = 1$, при каждом n, а потому при $q = 1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

4) Если же $q = -1$, то переменная величина q^n не стремится ни к какому пределу, потому что когда n пробегает значения 1, 2, 3, 4, . . ., величина $(-1)^n$ делает скачки от -1 к $+1$ и обратно.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{если } q > 1; \\ 0, & \text{если } |q| < 1; \\ 1, & \text{если } q = 1; \\ \text{не существует}, & \text{если } q = -1; \\ \infty & \text{если } q < -1. \end{cases} \qquad (13, 1)$$

Прежде чем решать следующие задачи, укажем на очень важные теоремы, выражающие признаки существования предела переменной величины.

Теорема 13, 1. Если переменная величина x_n монотонно возрастает вместе с n, но остается меньше некоторого числа K, то x_n стремится к пределу, и этот предел не больше K, т. е. меньше или равен K.

Теорема 13, 2. Если переменная величина x_n монотонно убывает с возрастанием n, но остается больше некоторого числа L, то x_n стремится к пределу и этот предел не меньше L, т. е. больше или равен L. Теоремы 13, 1 и 13, 2 можно объединить в одну, которая коротко формулируется так:

Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Эти теоремы будут использованы в задачах 13, 2—13, 4, которые будут решаться по такому общему плану:

1) прежде всего мы докажем, что данные последовательности монотонны;

2) после этого установим, что они ограничены.

Убедившись в выполнении этих двух требований и тем самым в существовании предела последовательности, мы будем отыскивать этот предел.

Задача 13, 2. Доказать, что если a — ***любое положительное число***, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \qquad (13, 2)$$

Решение. Допустим сначала, что число $a > 1$. Тогда последовательность $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a} \ldots$ является монотонно убывающей. Но эта последовательность и ограничена, так как $\sqrt[n]{a} > 1$. Поэтому на основании теоремы 13, 2 эта последовательность имеет предел L, и этот предел не может быть меньше, 1, т. е. $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколь угодно большом n имеем, что

$$\sqrt[n]{a} > L.$$

Отсюда $a > L^n$. Так как $L > 1$, то при $n \to \infty$ величина L^n — бесконечно большая. Но это **противоречит условию** задачи, согласно которому a — число и тем самым не может быть величиной бесконечно большой. Таким образом, предположение что $L > 1$ привело нас к противоречию и должно быть отброшено и остается только заключить, что $L = 1$.

Читателю предлагается самостоятельно доказать, что и при c положительном, но меньшем 1 имеет место соотношение (13, 2).

Указание. Воспользоваться теоремой 13, 1. В этом случае последовательность $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots$ — возрастающая (и ограниченная, т. к. $\sqrt[n]{a} < 1$). Пределом будет число $K \leqslant 1$. Доказательство должно привести к тому, что случай $K < 1$ является невозможным. Останется единственно возможное заключение $K = 1$, а это и требуется.

Задача 13, 3. Показать, что если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l^n}{n} = +\infty$, т. е. что последовательность $\{x_n\} = \frac{l^n}{n}$ расходится к $+\infty$.

Решение. Так как $l > 1$, то можно записать, что $l = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$l^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + n\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 + \ldots + \alpha^n;$$

$$\frac{l^n}{n} = \frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \ldots + \alpha^n\frac{1}{n}.$$

Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \ldots \frac{a^n}{n}\right) = +\infty,$$

т. е. переменная $x_n = \frac{l_n}{n}$ при $l > 1$ — бесконечно большая.

Поэтому можно также утверждать, что для достаточно больших n $l^n > n$, если $l > 1$. Результат этой задачи приводит также к выводу, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{l^n} = 0 \text{ при } l > 1.$$

Задача 13, 4. Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \qquad (13, 7)$$

Решение. При вычислениях, связанных с числом e, получается заключение, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ при любом n. Значит, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ меньше любого числа, которое больше 3 или равно 3, т. е. для всех чисел $n \geqslant 3$ имеет место неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$. Из этого следует, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n, \ \frac{(n+1)^n}{n^n} < n, \ (n+1)^n < nn^n, \ (n+1)^n < n^{n+1}.$$

Извлекая теперь из обеих частей неравенства корень степени $n(n+1)$, получаем, что

$$\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}},$$

или

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Мы установили это неравенство для того, чтобы показать, что последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$ — убывающая, когда n возрастает от значения, равного 3, т. е. $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \ldots$ — убывающая последовательность. А так как при любом целом $n > 0$ всегда $\sqrt[n]{n} > 1$, то эта убывающая последовательность ограничена. Значит, последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$, будучи убывающей и ограниченной, необходимо стремиться к пределу, причем этот предел не меньше 1. Обозначим этот предел через L. Так как этот предел не меньше 1, то $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию и тем самым для L останется единственная возможность быть равным 1. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколько угодно больших n будет $\sqrt[n]{n} > L$, а потому $n > L^n$. Это неравенство находится в противоречии с неравенством $L^n > n$, полученном в последнем абзаце предыдущей задачи при тех же условиях: $L > 1$, а n достаточно велико.

Таким образом предположение $L > 1$ привело к противоречию и должно быть отброшено. Для L остается только одна возможность быть равным 1 и тем самым соотношение (13, 7) доказано.

Отсюда можно получить следствие:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1, \qquad (13,3)$$

т. к.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

Задача 13, 5 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{9n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}$.

Указание. 1) $\sqrt[n]{5n}=\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}$. Применить теорему 12, 18 п. *В* о пределе произведения и использовать задачи 13, 2 и 13, 4. 2) $\sqrt[n]{n^4}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^4$. Использовать задачу 13, 4.

Ответ. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 0.

Для решения дальнейших задач полезна

Теорема 13, 3. Если для трех переменных x_n, y_n и z_n, начиная с некоторого номера n, выполняется соотношение

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n,$$

а x_n и y_n имеют равные пределы, то тот же предел имеет и z_n.

Задача 13, 6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}$.

Решение. Для $n>2$ выполняются неравенства

$$\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{3n+2}<\sqrt[n]{4n},$$

но

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n}=1,$$

а поэтому на основании последней теоремы 13, 3 заключаем, что искомый предел равен 1:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1.$$

Задача 13, 7 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}(n+2)}$.

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 13, 8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$. При вычислении этого предела мы не можем применить теорему 12, 18 п. *А* о пределе разности двух переменных, ибо эта теорема верна только в том

случае, когда обе переменные имеют предел. В нашем случае ни $\sqrt{n+2}$, ни $\sqrt{n}$ предела не имеют, так как на основании соотношений (12, 7) при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а вместе с ним и $\sqrt{n+1} \to +\infty \left(k = +\frac{1}{2} > 0\right)$.

Здесь мы имеем дело с разностью двух положительных бесконечно больших величин. Без специального исследования об этой разности нельзя сказать ничего определенного. Такие разности называют «неопределенностями» вида $\infty - \infty$ (запись $\infty - \infty$ — есть символическое обозначение «неопределенности» такого вида, а не вычитание символов). Данную переменную преобразуем, умножив и разделив ее на $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$. Это преобразование мы делаем для того, чтобы перенести иррациональность в знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 2 \cdot 0 = 0,$$

ибо $\sqrt{n+2}$ и $\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ есть положительные бесконечно большие величины, их сумма $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ есть тоже положительная бесконечно большая величина, а величина, обратная ей, $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ есть величина бесконечно малая. Предел же бесконечно малой величины равен нулю.

Задача 13. 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$.

Решение. Здесь снова мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин (см. 12, 7) («неопределенность» вида $\infty - \infty$), и без специального исследования никакого заключения о пределе их разности мы сделать не можем.

Как и в предыдущих двух задачах, перенесем иррациональность в знаменатель, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} =$$

разделим числитель и знаменатель на n

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \infty,$$

так как при $n \to \infty$ предел числителя равен 1, а знаменатель есть величина бесконечно малая, как сумма двух бесконечно малых

величин. Значит, мы имеем дело с величиной, которая обратна бесконечно малой, а такая величина — бесконечно большая.

Задача 13. 10 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Указание. Здесь снова фигурирует разность двух бесконечно больших величин $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, а множитель $\sqrt{n}$ предела не имеет. Поэтому теорему 12, 18 (пункты A и B) применить нельзя. Для решения задачи надо выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и в полученном выражении $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ произвести деление числителя и знаменателя дроби на $\sqrt{n}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 13, 11 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}.$$

Указание. Здесь мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших величин, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Также нельзя применить и теорему о пределе частного (12, 18 пункт C), так как для ее применения требуется, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы, а в данном случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (они величины бесконечно большие). Для решения задачи следует числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13, 12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}.$$

Указание. Здесь мы опять-таки встречаемся с отношением двух бесконечно больших величин. Теорему 12, 18 (пункт C) применить нельзя (числитель и знаменатель дроби предела не имеют). Для решения задачи числитель и знаменатель дроби резделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13, 13 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)$.

Ответ. 1) 1; 2) $\frac{a+b}{2}$.

Указание. При решении каждого из этих примеров мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Теорема о пределе разности и в первом и во втором случае неприменима, так как переменные не имеют предела. Перенести иррациональность в знаменатель, после чего числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Задача 13, 14. Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}};$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Указание. 1) Воспользоваться формулой (12, 2), переписать данное выражение в виде

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$$

и учесть результат задачи 12, 8.

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{4n+3}\right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Ответ. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{6}}$.

Задача 13, 15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на n. Можно поступить и иначе: представить данную дробь в виде

$$\sqrt[3]{\frac{n^2+5n}{(3n+2)^3}};$$

воспользоваться формулами (12, 2) и (12, 9).

Ответ. 0.

Задача 13, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}.$$

Указаиие. Числитель дроби записать так:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-2n=[1+3+5+\ldots+(2n-1)]-$$
$$-[2+4+6+\ldots+2n].$$

Каждую из сумм, стоящую в скобках, вычислить как сумму членов арифметической прогрессии. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

Решение трех следующих задач основано на применении формул $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ и $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Задача 13, 17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$.

Решение. Здесь в скобках стоит разность двух бесконечно больших величин. Полагая $\sqrt[3]{1-n^3}=a$; $n=b$, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на a^2-ab+b^2 и получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)\left[\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3+n^3}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=0,$$

так как знаменатель дроби при $n\to\infty$ есть сумма трех положительных бесконечно больших величин, а потому на основании п. 12, 20 заключаем, что это величина положительная, бесконечно большая. Величина же, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая, и ее предел равен нулю.

Задача 13, 18 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Здесь мы снова имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Полагая $(n+1)^{\frac{2}{3}}=a$, $(n-1)^{\frac{2}{3}}=b$ умножить и разделить на a^2+ab+b^2. После приведения подобных членов в числителе получится $4n$. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби, т. е. на $n^{\frac{4}{3}}$.

Ответ. 0.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с определением предела последовательности.

Задачи для дополнительных упражнений учащийся может взять из хорошо зарекомендовавшего себя задачника для втузов под редакцией Б. П. Демидовича «Задачи и упражнения по математическому анализу».