ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел функцин.

Определение предела функции

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε (хотя бы и как угодно малого) можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, ***отличных от a*** *и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Короче: число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящейся к a, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число, а δ соответствующим образом подобрано.

В определении предела функции следует обратить внимание на то, что вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке a. Для того чтобы функция $f(x)$ имела возможность стремиться к пределу при $x\to a$, необходимо лишь чтобы в области ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Прежде чем приступить к непосредственному вычислению предела функций, приведем основные сведения из теории:

14, 1. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

a) Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=0. \qquad (14,1)$$

b) Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ если имеет место одно из равенств

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;\quad \lim_{x\to a} f(y)=+\infty;\quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

c) Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x\to a$, если существует такое положительное число A, что для всех значений x из окрестности числа a выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant A$.

14, 2. *Свойства бесконечно малых функций.*

a) Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x\to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x\to a$.

b) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$, то сумма их, а также и разность их: $f_1(x)+f_2(x)$ и $f_1(x)-f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$ (это утверждение распространяется на любое фиксированное число функций).

c) Если при $x \to a$ функция $f(x)$ бесконечно мала, а функция $\varphi(x)$ — ограничена, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ есть функция бесконечно малая.

14, 3. *Свойства бесконечно больших функций.*

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), а функция $\varphi(x)$ — бесконечно велика ($\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$), то

a) сумма их — бесконечно велика, т. е. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$, предел отношения $f(x)$ к $\varphi(x)$ равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

b) если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b\ (b > 0)$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, причем $\varphi(x)$ положительна в окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

c) При положительном k, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x \to a} [kf(x)] = +\infty.$$

d) Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая, т. е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, то и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

14, 4. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:*

a) Если $f(x)$ при $x \to a$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала.

b) Если при $x \to a$ функция $\varphi(x)$ бесконечно мала, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $\varphi(x)$ в нуль не обращается.

14, 5. *Правила предельного перехода.*

a) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы, то и алгебраическая сумма их $f(x) \pm \varphi(x)$ имеет предел, который равен сумме их пределов, т. е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b_1$, то $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b \pm b_1$.

Короче (но не совсем точно): предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

b) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеет пределы, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ также имеет предел, который равен

произведению их пределов, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *а* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_1$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = bb_1$.

Короче (но не совсем точно): предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций. Свойства a) и b) распространяются на любое фиксированное число функций.

c) Если при $x \to a$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют пределы и предел функции* $\varphi(x)$ *не равен нулю, то предел их частного существует и равен частному от деления их пределов, т. е. если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ а } \lim_{x\to a} \varphi(x) = b_1 \ (b_1 \neq 0),$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} = \frac{b}{b_1}.$$

Короче (но не совсем точно): предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

14, 6. *Предел целой рациональной функции.*

Если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \tag{14, 2}$$

т. е. ***при отыскании предела целой рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.***

14, 7. *Предел дробно-рациональной функции.*

Если

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} F(x) = \frac{P(a)}{Q(a)} = F(a), \text{ если } Q(a) \neq 0, \tag{14, 3}$$

т. е. ***при отыскании предела дробно-рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением, если при этом предельном значении знаменатель не обращается в нуль.***

Задача 14, 1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4)$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 7x + 4$ — целая рациональная. Для отыскания ее предела применима формула (14, 2). Заме-

ним в аналитическом выражении функции x его предельным значением и получим

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

Задача 14, 2 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^3-7x^2+4x+2);\qquad 2)\ \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^3-x+2\right).$$

Ответ. 1) -2, 2) 30.

Указание. Воспользоваться формулой (14, 2).

Задача 14, 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Здесь отыскивается предел дробно-рациональной функции. Прежде чем применить (14, 3), надо проверить, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x=3$. Проверяем: $3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{3^2+3+2}{3^2+2\cdot 3+8}=\frac{14}{23}.$$

Задача 14, 4 (для самостоятельного решения). Найти пределы

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4};\quad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}.$$

Указания: 1) Проверить, что знаменатель дроби в первом примере при $x=1$, а во втором при $x=-1$ не обращается в нуль; 2) воспользоваться формулой (14, 3).

Ответ. 1) 0; 2) $-\dfrac{3}{2}$.

Задача 14, 5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x-2}$.

Решение. Знаменатель дроби $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ обращается в нуль при $x=2$, а потому функция $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ не существует.

Теорему о пределе дроби (14, 5 п. *c*) применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. По той же причине нельзя применить и формулу (14, 3). Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x\to a$ значение функции $f(a)$ при $x=a$ может не рассматриваться. От функции $f(x)$ это определение не требует, чтобы точка $x=a$ входила в область существования функции. Поэтому значение $x=a$ может нами не приниматься во внимание. Именно эти соображения и дадут возможность решить задачу. В нашем случае мы должны считать, что x, стремясь к 2,

никогда не становится равным 2, а потому значение функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ нас не интересует.

При $x=2$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем в данном случае отношение двух бесконечно малых функций, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Для решения задачи разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3-8}{x-2}$ на $x-2$. Мы имеем право это сделать потому, что значение $x=2$ не рассматривается и, значит, $x-2 \neq 0$.

Если бы указанной оговорки в определении предела функции не было и мы должны были бы рассматривать и значение $x=2$, то разделить числитель и знаменатель дроби на $x-2$ мы не смогли бы, так как такое деление означало бы деление числителя и знаменателя дроби на нуль, что, конечно, недопустимо. После сокращения дроби на $x-2$ получим

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4,$$

и нам придется отыскивать предел не данной функции, а функции x^2+2x+4. Тогда перед учащимся должен возникнуть такой вопрос: тождественны ли функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ и x^2+2x+4. Этот вопрос имеет положительный ответ: функции тождественны, если не рассматривать значения $x=2$. Следует иметь в виду, что две функции тождественны, если они удовлетворяют таким двум требованиям:

1) их области существования совпадают и

2) при одном и том же значении аргумента, взятом из области существования функции, численные значения функций равны.

В нашем случае эти два требования будут выполнены, если не рассматривать значения $x=2$, но ведь оно и не рассматривается. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=$$
$$=2^2+2\cdot 2+4=12,$$

так как функция x^2+2x+4 — целая рациональная функция и для определения ее предела на основании формулы (14,2) следует в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.

Можно указать такое

Правило. **Для того чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x\to a$ числитель и знаменатель дроби имеет пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x-a$ и перейти к пределу.**

Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x - a$ (это правило основывается на известном из элементарной алгебры следствии из теоремы Безу, согласно которому, если многочлен обращается в нуль при $x = a$, то он делится без остатка на $x - a$).

Теперь для самостоятельного решения будет предложен ряд задач на определение предела дробно-рациональной функции.

Задача 14,6 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}.$$

Указание. При $x = 3$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые, пределы их равны нулю. Об их отношении без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Теорему 14,5 п. *c* о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Следует применить указанное правило; разделить числитель и знаменатель дроби на $x - 3$. Повторить рассуждения предыдущей задачи о допустимости такого деления.

Ответ. $\frac{7}{3}$.

Следует не только запомнить тот или иной прием, но главное — понять, на чем основано его применение, и каждое действие проводить совершенно сознательно, а не автоматически, «по правилам». Применяя правило, надо понимать те положения, из которых оно выведено.

Задача 14,7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}.$$

Указание. Здесь опять-таки функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, бесконечно малы при $x \to 1$. Для решения вопроса о пределе их отношения следует разделить числитель и знаменатель дроби на $x - 1$. Полученные после этого деления функции при $x \to 1$ будет опять-таки бесконечно малыми. Снова каждую из них следует разделить на $x - 1$. Этим указанием воспользуетесь и при решении двух следующих задач.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 - 6x^2}{4x^5 + 2x^3 + x^2}.$$

Ответ. -6.

Задача 14,9 (для самостоятельного решения).

Найти $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 14,10. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — целые положительные числа).

Решение. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю, а поэтому это функции бесконечно малы. Для решения вопроса о пределе их отношения следует числитель и знаменатель дроби разделить на $x-1$. Допустимость такого деления подробно была объяснена в задаче 14,5. Повторяем, что x, стремясь к 1, не становится равным 1, а потому $x-1\neq 0$. и деление на $x-1$ имеет смысл.

Функция $\frac{x^m-1}{x^n-1}$ при $x=1$ не существует, но значение $x=1$ нашему рассмотрению и не должно подлежать. Воспользуемся известной формулой алгебры

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}). \quad (14,4)$$

Полагая здесь $a=x$, а $b=1$, в нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{m\text{ раз}}}{\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}}=\frac{m}{n}.$$

Задача 14,11. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Решение. При $x\to -1$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, а потому это функции — бесконечно малые. Чтобы можно было применить формулу (14,4), с помощью которой была решена предыдущая задача, следует сделать подстановку $x=y^{35}$, где показатель степени 35 — наименьшее кратное показателей корней.

Если $x=y^{35}$, то $\sqrt[7]{x}=y^5$, а $\sqrt[5]{x}=y^7$, и тогда $\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\frac{1+y^5}{1+y^7}$, причем $y\to -1$, когда $x\to -1$, и задача перепишется так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+y^5}{1+y^7}.$$

Теперь следует разделить числитель и знаменатель дроби на $1+y$, применить формулу (14,3).

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 14,12 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}.\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}.$$

Ответ. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$.

Задача 14,13. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$.

Решение. При $x\to 3$ имеем предел числителя:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1;$$

предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+12)=0.$$

Теорема (14,5 п. *с.*) о пределе дроби неприменима. Рассмотрим обратную дробь $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$, и ее предел при $x\to 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x-5}=\frac{0}{1}=0$$

(здесь теорема о пределе дроби применима, так как предел знаменателя $2x-5$ не равен нулю). Так как предел функции $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$ равен 0, то эта функция при $x\to 3$ бесконечно малая, а потому функция $\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ при $x\to 3$ — бесконечно большая, и тогда ее предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}=\infty$ (мы воспользовались теоремой 14,4 пункт (*б.*).

Задача 14,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^1-3x+2}.$$

Ответ. ∞

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

Ответ. n.

Задача 14,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. ∞.

Задача 14,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Ответ. -1.

Указание. После приведения к общему знаменателю окажется, что при $x \to -1$ числитель и знаменатель — функции бесконечно малые. Воспользоваться указанным на стр. 97 правилом.

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на нахождение предела функции.

Решим несколько задач на нахождение предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$.

Задача 15,1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1}$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби, надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы и чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие (см. теоремы 14,4 о свойствах бесконечно больших функций. Рекомендуется еще раз повторить эти теоремы). Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых функций, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи следует применить прием, знакомый из решения задачи 12,1 (полезно также возвратиться к задаче 12,8): дроби разделить на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейти к пределу.

Итак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3},$$

так как при $x \to \infty$ $\frac{1}{x}$ — величина бесконечно малая, а потому и $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ — величины бесконечно малые (см. теоремы 14,4); $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{1}{x}$, а $\frac{5}{x^3} = 5\frac{1}{x^3}$ и пределы этих величин равны нулю, когда $x \to \infty$.

После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе дроби, так как теперь