Указание. После приведения к общему знаменателю окажется, что при $x \to -1$ числитель и знаменатель — функции бесконечно малые. Воспользоваться указанным на стр. 97 правилом.

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на нахождение предела функции.

Решим несколько задач на нахождение предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$.

Задача 15,1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1}$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби, надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы и чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие (см. теоремы 14,4 о свойствах бесконечно больших функций. Рекомендуется еще раз повторить эти теоремы). Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых функций, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи следует применить прием, знакомый из решения задачи 12,1 (полезно также возвратиться к задаче 12,8): дроби разделить на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейти к пределу.

Итак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3},$$

так как при $x \to \infty$ $\frac{1}{x}$ — величина бесконечно малая, а потому и $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ — величины бесконечно малые (см. теоремы 14,4); $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{1}{x}$, а $\frac{5}{x^3} = 5\frac{1}{x^3}$ и пределы этих величин равны нулю, когда $x \to \infty$.

После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе дроби, так как теперь

и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.

Для самостоятельного решения предлагается несколько аналогичных задач.

Задача 15,2 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1};$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}.$$

Ответ. 1) 5; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{7}{5}$.

Задача 15,3 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. $\frac{1}{75}$.

Задача 15,4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-x}{x^2-3}-\frac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4.$$

Ответ. 16.

Решение остальных задач этого практического задания основано на применении теоремы:

При постоянном показателе степени можно переходить к пределу в основании степени при условии, что предел основания степени существует, т. е.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^k=[\lim_{x\to a}f(x)]^k, \qquad (15,1)$$

где k — постоянная величина (для случая, когда k — целое число, мы этой теоремой пользовались неоднократно, так как она прямо следует из теоремы о пределе произведения).

Из формулы (15,1) следует, что при любом нечетном m всегда

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}. \qquad (15,2)$$

Если же m — четное число, то эта формула верна только тогда, когда функция $f(x)$ — неотрицательна, т. е. когда $f(x) \geqslant 0$.

Выполним сначала ряд простых упражнений на применение этой теоремы.

Задача 15,6. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}$.

Решение. На основании формулы (15,2) имеем:

1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 27} x} = \sqrt[3]{27} = 3$;

2) $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to -243} x} = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Задача 15,7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+7)} = \sqrt{2\cdot 2^2+7} = \sqrt{15}$.

Задача 15,8. Найти при нечетном m

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x\to 0} x} = \sqrt[m]{0} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{\dfrac{1}{x}} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} = \sqrt[m]{0} = 0$,

т. е. при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}} = \infty$,

так как по результатам второго примера этой задачи при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала, потому функция $\sqrt[m]{x}$ — бесконечно велика.

Задача 15,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Когда $x\to 0$, числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малы:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1) = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+1)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $x\to 0$, не становясь равным нулю, то деление на x числителя и знаменателя дроби возможно.

При решении задачи мы вместо предела функции $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ отыскали предел функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$; здесь должен быть затронут вопрос о тождественности этих функций (подобно тому как этот вопрос возник при решении задачи 14,5). О функциях $\varphi(x)$ и $f(x)$ мы можем сказать, что они тождественны ($x\neq 0$).

Таким образом, замена функции $f(x)$ при отыскании предела функцией $\varphi(x)$ является законной.

При отыскании предела дроби, содержащей иррациональные выражения, в большом числе случаев приходится с помощью преобразований переходить от заданной функции к другой функции, и у учащегося должен возникнуть вопрос о тождественности заданной функции и той, которая получается в результате преобразований. Во всех дальнейших примерах исследованием этого вопроса мы заниматься не будем, предоставляя это читателю.

Теперь, после решения этой задачи, укажем правило для решения задач, в которых требуется определить предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда ее числитель и знаменатель — бесконечно малые функции, т. е. когда их пределы равны нулю.

Правило. **Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, после этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение и т. д.) и перейти к пределу.**

Задача 15,10. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Решение. При $x\to 2$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. Перенесем иррациональность в знаменатель, для чего умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+5}+3$.

Получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

Задача 15,11 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$;

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$.

Задача 15,12. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x-7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$.

Решение. При $x\to 3$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. В этой задаче придется сначала числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}$, а потом на $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}$ или сразу умножить числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})$. Используя это указание, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(x-3)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\frac{5}{12}$$

Задача 15,13 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x^2-39}}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2-19}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Ответ. 1) $\frac{7}{12}$; 2) 0; 3) $\frac{23\sqrt{13}}{24}$; 4) $-\frac{3}{2}$.

Указание. В третьем примере одним из множителей числителя будет $3x^2-x-44$. Корни этого квадратного трехчлена $x_1=4$; $x_2=-\frac{11}{3}$, вследствие чего $3x^2-x-44=3(x-4)\left(x+\frac{11}{3}\right)$.

Задача 15,14. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

Решение. Здесь и предел числителя, и предел знаменателя равен нулю. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель. Воспользуемся известной формулой алгебры $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$. Положим $a=\sqrt[3]{x-6}$, $b=1$. Значит, для того, чтобы получить в числителе разность кубов, надо его умножить на $\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1$. Умножая и знаменатель на эту величину, получаем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[3]{x-6}-1)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-6-1}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Задача 15,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}.$$

Ответ. $-\frac{1}{9}$.

Задача 15,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}$.

Задача 15,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Ответ. $\frac{21}{8}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых требуется определить предел функции, содержащей корни в том случае, когда аргумент стремится к ∞ или к $\pm\infty$.

Задача 15,18. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь непосредственно теорема 14,5 не может быть применена, так как при $x\to+\infty$ пределы слагаемых не существуют: мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин, о которой ничего определенного без специального исследования сказать нельзя.

Умножим и разделим данное выражение на сопряженное с ним и получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0,$$

так как при $x\to+\infty$ знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, есть функция бесконечно большая (см. задачу 15,8(3)), а потому дробь $\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$ есть величина бесконечно малая, а ее произведение на -2 есть также бесконечно малая величина.

Задача 15,19. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. Когда $x\to+\infty$, выражение, стоящее в скобках, есть разность двух бесконечно больших величин, о которой без специального исследования нельзя сказать ничего определенного. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на выражение, сопряженное с $\sqrt{x^2+1}-x$, т. е. на $\sqrt{x^2+1}+x$, и получим

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x\to-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, имеет в этом случае положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине, множитель же x, стоящий за скобкой, неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. Поэтому все выражение

$x(\sqrt{x^2+1}-x)$ при $x \to -\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение и

$$\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty.$$

Задача 15,20 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}.$$

Ответ. При $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ искомый предел равен 0.

Задача 15,21. Найти $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$.

Решение. 1) Рассмотрим сначала случай $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Так как $x > 0$ при $x \to +\infty$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, то $\sqrt{x^2} = +x$ и $\sqrt{x^2+4} = +x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$,

а потому $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$

2) Пусть $x \to -\infty$. По-прежнему $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, но теперь $\sqrt{x^2} = -x$, так как $x < 0$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, и $\sqrt{x^2+4} = -x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, а

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -1.$$

Задача 15,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}).$$

Указание. Учесть, что при $x > 0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, а при $x<0$ тот же $\sqrt{x^2} = -x$.

Ответ. При $x \to +\infty$ искомый предел равен $+1$, а при $x \to -\infty$ искомый предел равен -1.

Задача 15,23 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2+2}-x).$$

Ответ. 0 при $x \to +\infty$ при $x \to -\infty$.

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$$

и сократить дробь на x.

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2.

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$;

$\lim\limits_{x\to a}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} a$; $\lim\limits_{x\to a}\sec x=\sec a$; $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec} a$.