

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} \right]$$

и сократить дробь на x .

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^{\frac{4}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} + (x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2 .

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a; \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a; \quad \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a; \quad \lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a; \quad \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} a.$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ — не существует, так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ нельзя приписать никакого числового значения.

Задача 16,1. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. На основании приведенного выше правила для отыскания предела тригонометрических функций $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x =$

$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$, а потому, когда $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $1 - \sin x \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos^2 x =$

$= \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем дело с отношением двух бесконечно малых функций. Требуется, как уже хорошо известно читателю, специальное исследование, чтобы решить вопрос о пределе. Зная, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x} = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos y - \sin y}{1 - \operatorname{tg}^2 y}.$$

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4 \sin^2 x}{\cos 3x}.$$

Указание. Под знаком предела находится при $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ отношение двух бесконечно малых функций. Следует числитель разложить на множители:

$$1 - 4 \sin^2 x = 4 \left(\frac{1}{4} - \sin^2 x \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) \left(\frac{1}{2} + \sin x \right).$$

Знаменатель дроби

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos x \left(\cos^2 x - \frac{3}{4} \right) = \\ = 4 \cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Учесть, что $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$.

Ответ. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16.4. Найти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin a}}$.

Решение. При $x \rightarrow a$ и числитель, и знаменатель дроби — функции бесконечно малые:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{\operatorname{tg} a} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x} - \\ - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \lim_{x \rightarrow a} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} a} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a} = 0^*.$$

Аналогичные рассуждения провести и по отношению к знаменателю. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin a}} = \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a})(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} a})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin a \cdot \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2 a})}{(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin a})(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} a})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin a \cdot \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2 a})} = \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a)(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin x \cdot \sin a} + \sqrt[3]{\sin^2 a})}{(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} a})(\sin x - \sin a)} = \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin a \cdot \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2 a}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{\cos x \cos a 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}} =$$

* $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Если не сделать этой оговорки, то, например, при $a = \frac{\pi}{2}$ будет $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не имеет числового смысла.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha}} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \cos \frac{x-\alpha}{2}}{\cos x \cos \alpha 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \cos^3 \alpha}}.
 \end{aligned}$$

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin \alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin \alpha}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{\sin \alpha}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{1}{\cos^3 \alpha}$.

При решении остальных задач этого практического занятия следует иметь в виду, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (16,1)$$

Задача 16,6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$ (k — величина постоянная).

Решение. Иногда при отыскании предела полезно произвести замену переменной с тем, чтобы упростить отыскание предела и использовать уже известные пределы.

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную, и из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Для решения предложенной задачи сделаем такую подстановку: $kx = y$. Из этого равенства следует, что $y \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow 0$, а $x = \frac{y}{k}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k \sin y}{y} = k \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = k$,

так как $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Следует запомнить, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (16,2)$$

Задача 16,7. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin lx}{x}} = \frac{k}{l}$.

Мы разделили числитель и знаменатель дроби на x . Это можно было сделать, так как значение $x = 0$ не должно рас-

сматриваться. При вычислении предела числителя и знаменателя последней дроби использована формула (16, 2).

Задача 16, 8 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 16, 9. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x \cos kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos kx} =$
 $= k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos kx} = k \frac{1}{\cos(\lim_{x \rightarrow 0} kx)} = k \frac{1}{\cos 0} = k \frac{1}{1} = k.$

Задача 16, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}$.

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на x и перейти к пределу. Использовать решение предыдущей задачи.

Ответ. $\frac{k}{l}$.

Задача 16, 11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{x^2}$.

Указание. Дробь, стоящую под знаком предела, записать так:

$$\frac{\sin^2 ax}{x^2} = \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin ax}{x}.$$

Использовать теорему о пределе произведения*.

Ответ. a^2 .

Задача 16, 12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}$.

Решение. При $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые функции. Воспользуемся тем, что $1 - \cos mx = -2 \sin^2 \frac{mx}{2}$ и тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{mx}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}} = 2 \frac{m}{2} \frac{m}{2} = \frac{m^2}{2}$$

(мы использовали формулу (16, 2). В нашем случае $k = \frac{m}{2}$).

Задача 16, 13. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Решение. При $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ — бесконечно большие функции; таким образом, под знаком предела находится

* Можно поступить и так: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \right)^2 = a^2$

разность двух бесконечно больших функций. Теорему (14, 5а) о пределе разности применить нельзя, так как не существует конечных пределов каждой из функций $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Преобразуем эту разность так:

$$\begin{aligned}\sec x - \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.\end{aligned}$$

После этого получаем

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$$

К последней дроби можно было применить теорему о пределе дроби, так как предел знаменателя равен 2, а числитель дроби имеет конечный предел 0.

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos kx - \cos lx}{x^2}.$$

Указание. Числитель дроби равен $-2 \sin \frac{k+l}{2} x \cdot \sin \frac{k-l}{2} x$; использовать также формулу (16, 2).

Ответ. $\frac{l^2 - k^2}{2}$.

Задача 16, 15 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$.

Указание. При $x \rightarrow 0$ функция $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая, а x — величина бесконечно малая. Значит, мы имеем произведение функции бесконечно большой на величину бесконечно малую и требуется специальное исследование, чтобы определить предел этого произведения.

Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, а поэтому $x \operatorname{ctg} x = x \frac{\cos x}{\sin x}$. На основании формулы (16, 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ. 1.

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

Указание. $\sin(a+x) - \sin(a-x) = 2 \cos a \sin x$.

Ответ. $2 \cos a$.

Задача 16, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}.$$

Указание. Представить числитель в виде

$$2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right),$$

а знаменатель

$$\begin{aligned}1 - 2 \cos x &= 2\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos x\right) = \\&= -4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Сократить дробь и перейти к пределу

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16, 18. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение. При $x \rightarrow 1$ не существует предела $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, а потому нельзя применить теорему (14, 5 в) о пределе произведения. Сделаем в нашем примере подстановку: $1-x=y$. Когда $x \rightarrow 1$, то новая переменная $y \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0$. Если $1-x=y$, то $x=1-y$; выражение, стоящее под знаком предела, перепишется так:

$$\begin{aligned}(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= y \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-y) = y \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} y\right) = y \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} y = \\&= y \frac{\cos \frac{\pi}{2} y}{\sin \frac{\pi}{2} y} = \frac{y}{\sin \frac{\pi}{2} y} \cos \frac{\pi}{2} y.\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \frac{\pi}{2} y} \lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2} y = \\&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{y}\right)} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

Указание. 1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Преобразовать дробь к виду

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16, 21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дроби разделить на x , во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1 + \cos \pi x = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg} \pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Число e .

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e .

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad (17, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad (17, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \quad (17, 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \quad (17, 4)$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так: