

$$= \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2m}}} \right\}_{m \rightarrow \infty}^{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2m} \right) m} = e^{-2 \lim_{m \rightarrow \infty} m \sin^2 \frac{x}{2m}} = 1,$$

так как $\lim_{m \rightarrow \infty} m \sin^2 \frac{x}{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{2m} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$.

Если $m \rightarrow \infty$, то $\frac{x}{2m} \rightarrow 0$ и $\sin \frac{x}{2m} \rightarrow 0$.

Для вычисления второго предела $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$ сделаем подстановку $\frac{x}{2m} = z$, тогда $z \rightarrow 0$. когда $m \rightarrow \infty$, а $\frac{1}{m} = \frac{2z}{x}$, и получим, учитывая, что x — величина постоянная

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\frac{2z}{x}} = \frac{x}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{x}{2} \cdot 1 = \frac{x}{2}$$

и, значит,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \sin^2 \frac{x}{2m} = 0 \cdot \frac{x}{2} = 0, \text{ а } e^0 = 1.$$

Задача 17, 24 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ. e^{-1} .

Задача 17, 25 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Ответ. $e^{-\frac{1}{2}}$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление пределов выражений, содержащих логарифмы и показательные функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Теорема. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и этот предел положителен ($A > 0$), то

$$\lim_{x \rightarrow a} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]. \quad (18, 1)$$

Короче (но менее точно): можно переходить к пределу под знаком логарифма.

Замечание. Требование теоремы о том, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ должен быть положительным, связано с тем, что число A в правой части формулы (18, 1) стоит под знаком логарифма, а логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

Между десятичными и натуральными логарифмами существует связь, выражаемая формулой

$$\lg x = M \ln x, \quad (18, 2)$$

где M — модуль перехода: $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,43429$.

Сначала выполним упражнения на непосредственное применение формулы (18, 1).

Задача 18, 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 9} \lg(x+1)$.

Решение. На основании формулы (18, 1)

$$\lim_{x \rightarrow 9} [\lg(x+1)] = \lg \left[\lim_{x \rightarrow 9} (x+1) \right] = \lg 10 = 1.$$

Задача 18, 2. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2+x+5}{x^2-2}$.

Решение. На основании формулы (18, 1) можно записать, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x^2+x+5}{x^2-2} \right] &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+5}{x^2-2} \right] = \ln \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} \right]}_{\text{числитель и знаменатель разделены на } x^2} = \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Задача 18, 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\ln \frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}} \right]$.

Решение. Воспользуемся опять формулой (18, 1):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left[\ln \frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}} \right] &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}} \right] = \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{8})(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})} \right] = \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{x+4-8} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+4}+\sqrt{8}) \right] = \\ &= \ln 2\sqrt{8} = \ln 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к вычислению пределов, которые играют важную роль в дифференциальном исчислении.

Задача 18, 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \\ = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

Результатом этой задачи нам придется часто пользоваться, а потому для ссылок запишем его отдельно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (18, 3)$$

Получите самостоятельно более общий результат:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a. \quad (18, 3a)$$

Задача 18, 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, считая, что a — положительная постоянная величина, не равная 1.

Решение. Сделаем подстановку:

$$a^x - 1 = z. \quad (18, 4)$$

На основании указания стр. 112 мы должны: 1) величину x , стоящую под знаком предела, выразить через z и 2) определить предел новой переменной z , когда старая переменная $x \rightarrow 0$.

Из подстановки (18, 4) следует, что $a^x = 1+z$, $x \ln a = \ln(1+z)$; $x = \frac{\ln(1+z)}{\ln a}$, а $\lim_{x \rightarrow 0} z = \lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = 0$, т. е. при $x \rightarrow 0$ и $z \rightarrow 0$.

$$\text{Теперь уже } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}} = \frac{\ln a}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z}} =$$

$= \ln a$, так как на основании (18, 3) предел знаменателя равен 1, а предел $\lim_{x \rightarrow 0} \ln a = \ln a$, ибо a , а вместе с ним $\ln a$ — величина постоянная. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (18, 5)$$

Если в формуле (18, 5) взять $x = \frac{1}{y}$, то $a^x = a^{\frac{1}{y}}$, $y = \frac{1}{x}$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \text{ и тогда } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} = \ln a, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \left(a^{\frac{1}{y}} - 1 \right) = \ln a. \quad (18, 6)$$

Если $y \rightarrow \infty$, принимая целые и положительные значения, то это равенство можно переписать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a. \quad (18.7)$$

Задача 18,6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

Решение. Решение этой задачи потребует некоторых искусственных преобразований для того, чтобы можно было использовать результаты двух предыдущих задач. Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на x :

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{x}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}, \text{ так как } 3^{2x} = 9^x.$$

и теперь

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{1}{\frac{9^x-1}{x}} = \frac{1}{\ln 9},$$

Использовать
формулу (18.3) Использовать
формулу (18.5)

Задача 18,7 (для самостоятельного решения). Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 1}{x}$.

Указание. $\frac{3^{\operatorname{tg} x} - 1}{x} = \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. При отыскании предела первого множителя положить $\operatorname{tg} x = z$ и воспользоваться результатом задачи 18,5.

Ответ. $\ln 3$.

Задача 18,8 (для самостоятельного решения) Найти

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Указание. Сделать подстановку $5 \ln x = z$ и воспользоваться формулой (17,2).

Ответ. e^5 .

Задача 18,9. (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Указание. В числителе дроби отнять и прибавить 1, записать дробь в виде

$$\frac{a^x - 1 - b^x + 1}{x} = \frac{a^x - 1 - (b^x - 1)}{x} = \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x}$$

и воспользоваться формулой (18,5).

Ответ. $\ln \frac{a}{b}$.

Задача 18.10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

Ответ. $\alpha - \beta$.

Задача 18.11. Доказать, что если

$$\lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)] = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A.$$

Доказательство. На основании того, что мы имеем право переходить к пределу под знаком логарифма, можно вместо $\lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)]$ записать $\ln [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] = A$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A$.

Итак, если $\lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)] = A$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A. \quad (18.8)$$

Задача 18.12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Сделаем подстановку $(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = y$, откуда

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{3}{x} \ln (1 + \operatorname{tg} x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \ln (1 + \operatorname{tg} x) = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x}. \end{aligned}$$

При вычислении первого предела положить $\operatorname{tg} x = z$, использовать результат задачи 18.4; получится, что $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 3 \cdot 1 \cdot 1$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 3$, и на основании (18.8) $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^3$, а значит, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = e^3$.

Задача 18.13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}}$$

Ответ. e^5 .

Задачу можно решить и иначе: $(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{3 \operatorname{tg} x}{x}} =$
 $= [(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}]^{\frac{3}{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x}{x} = e^3$
(при вычислении предела в квадратной скобке положить $\operatorname{tg} x = z$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.)

Задача 18,14 (для самостоятельного решения) Найти

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

Указание. В числителе дроби заменить 1 на $\ln e$. Тогда выражение, стоящее под знаком предела, запишется так:

$$\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \ln \left(\frac{x}{e} \right)^{\frac{1}{x-e}},$$

и теперь

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \ln \left(\frac{x}{e} \right)^{\frac{1}{x-e}} &= \ln \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{x}{e} \right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln \lim_{x \rightarrow e} \left[1 + \frac{x}{e} - 1 \right]^{\frac{1}{x-e}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow e} \left(1 + \frac{x-e}{e} \right)^{\frac{e}{x-e} \cdot \frac{1}{e}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow e} \left(1 + \frac{x-e}{e} \right)^{\frac{e}{x-e}} \right]^{\frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{1}{e}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Сравнение бесконечно малых величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞ . Тогда имеют место приводимые ниже определения.

Определение 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то функция $f(x)$ назы-

вается бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией $\varphi(x)$, а функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с функцией $f(x)$.

Определение 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, то функция $f(x)$ назы-

вается бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с $\varphi(x)$, а $\varphi(x)$ называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией $f(x)$.

Определение 3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$ и $A \neq 0$, то бесконечно

малые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются бесконечно малыми одного и того же порядка.