

Решение. Так как при $x \rightarrow 0$ бесконечно малая функция $\sin 3x \sim 3x$, то заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$, получаем

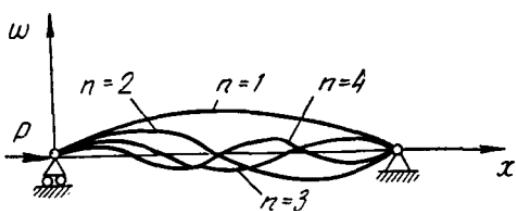
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^4 + x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^4 + x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x^3 + x + 1)} = 3.$$

Задача 19. 13 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 132), найти $\lim_{x \rightarrow n} \frac{\cos ax - \cos an}{n^2 - x^2}$.

Ответ. $\frac{a \sin an}{2n}$.

Задача 19. 14 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 132), найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin kx} \right)^n$.

Ответ. $\frac{1}{k^n}$.



Задача 19. 15 (для самостоятельного решения). Используя ту же теорему, доказать, что

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1-x)} = -1; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cosec} x \cdot \ln(1+x) = 1.$$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. Если предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен значению функции в точке $x = a$, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$ или в точке a , т. е.

для функции $f(x)$, непрерывной при $x = a$ должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (20, 1)$$

При этом следует иметь в виду, что для непрерывности функции при $x = a$ равенство (20,1) должно выполняться при стремлении x к a любому закону.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной при $x = a$, требуется выполнение таких трех условий:

1. Точка a должна принадлежать области определения функции, так как иначе о значении функции $f(a)$ в этой точке не имеет смысла говорить. Функция $f(x)$ должна быть определена не только в самой точке a , но и в некоторой ее окрестности.

2. Функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

3. Этот предел A должен быть равен значению функции в точке $x = a$, т. е. должно выполняться равенство $f(a) = A$.

Если соотношение (20, 1) не имеет места для данной функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$, то функция называется разрывной в точке $x = a$, а сама точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка) называется непрерывной в этой области (в интервале, на отрезке).

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке ее приращение Δy стремится к нулю, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю, или иначе: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (20,2)$$

Односторонние пределы функции

a) **Левосторонний предел функции.** Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x , стремясь к a , может принимать только такие значения, которые меньше a , то этот предел, если он существует, называется левосторонним пределом функции $f(x)$ (или левым пределом функции). Для того чтобы показать, что x стремится к a , оставаясь меньше a , употребляется запись: $x \rightarrow a - 0$, а левосторонний предел функции обозначается символами:

$$1) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ или } 2) f(a-0).$$

b) **Правосторонний предел функции.** Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x , стремясь к a , может принимать только такие значения, которые больше a , то этот предел, если он существует, называется правосторонним пределом функции $f(x)$ (или правым пределом функции).

То что x , стремясь к a , остается больше a , обозначается так: $x \rightarrow a + 0$, правосторонний предел функции обозначается одним из символов:

$$1) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ или } 2) f(a+0).$$

Очевидно, что предел функции при $x \rightarrow a$ существует только тогда, когда существуют и равны между собой ее левосторонний и правосторонний пределы, т. е. когда $f(a-0) = f(a+0)$. Символы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ являются только сокращенным обозначением левостороннего и правостороннего пределов и ничего другого не обозначают. Их можно применять только в случаях, когда определяющие их пределы существуют.*.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$, если ее левосторонний и правосторонний пределы существуют, между собой равны и равны значению функции в этой точке, т. е. $f(a)$.

Таким образом, для непрерывности функции в точке $x = a$ требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a). \quad (20,3)$$

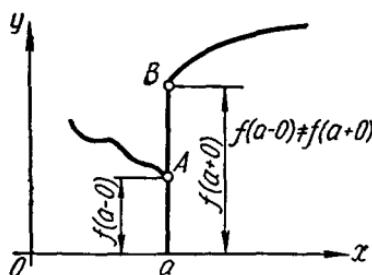
Точки разрыва и их классификация

Если равенство (20,3) в какой-либо его части не выполняется, то о точке $x = a$ говорят, что она является точкой разрыва.

1. Точка разрыва первого рода

Определение. Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, но не равны между собой, т. е. если

$$f(a-0) \neq f(a+0), \quad (20,4)$$



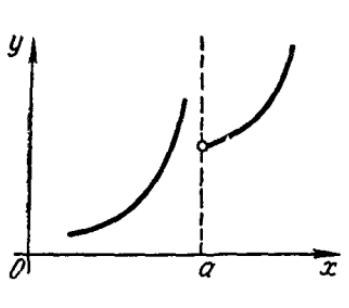
Фиг. 20.1.

то точка a называется точкой разрыва первого рода (фиг. 20.1).

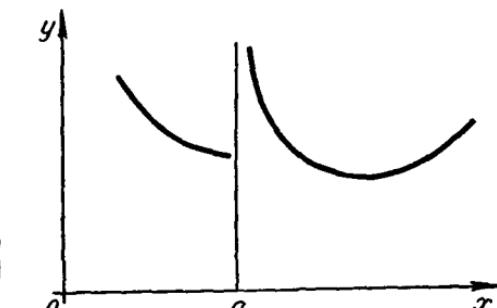
* Символ $x \rightarrow a$ означает, что x стремится к a , изменяясь по любому закону. Тем самым этот символ отличается от символов $x \rightarrow a - 0$ и $x \rightarrow a + 0$.

2. Точка разрыва второго рода

Определение. Если в точке $x = a$ не существует левосторонний или правосторонний предел функции или оба одновременно, то эта точка называется точкой разрыва второго рода (фиг. 20,2; 20,3; 20,4). На фиг. 20,4 отсутствует левосторонний предел



Фиг. 20.2.



Фиг. 20.3.

функции; на фиг. 20,3 нет правостороннего предела функции, а на фиг. 20,4 у функции нет ни левостороннего, ни правостороннего предела. Во всех этих случаях функция в точке $x = a$ терпит разрыв второго рода (иначе: точка $x = a$ — точка разрыва второго рода).

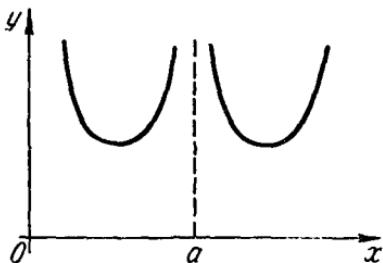
3. Устранимый разрыв

Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы между собой равны, но их значения не совпадают со значением

функции в точке a , т. е. со значением $f(a)$, то точка $x = a$ называется точкой «устранимого» разрыва. Таким образом, в этом случае

$$f(a - 0) = f(a + 0) \neq f(a). \quad (20,5)$$

Разрыв «устраняется» тем, что полагают $f(a)$ равным $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$, т. е. принимают, что $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



Фиг. 20.4.

Свойства непрерывных функций

Теорема. Сумма, разность, произведение и частное двух функций, непрерывных в одной и той же точке a , есть функция непрерывная в той же точке, причем в случае частного предполагается, что функция делитель не обращается в нуль при $x = a$. (Теорема остается верной для суммы и произведения любого конечного числа функций).

Упражнения, связанные с первым определением непрерывной функции

Задача 20.1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом значении x , т. е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заданная функция определена на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Возьмем из этого интервала произвольное значение $x = a$. На основании известных теорем о пределе функции мы можем написать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (3x^3 - 4x + 5) = 3a^3 - 4a + 5.$$

Но ведь и $f(a) = 3a^3 - 4a + 5$ и, таким образом, у нас выполнено соотношение (20.1): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, а это и значит, что рассматриваемая функция непрерывна при $x = a$. Учитывая, что a произвольное число интервала $(-\infty, +\infty)$, мы заключаем, что заданная функция непрерывна при любом значении x , т. е. на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Задача 20.2. Доказать, что любой многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен при всех значениях x .

Решение. Пусть $x = a$ — произвольное значение x из бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, в котором определена заданная функция.

Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Действительно, на основании известной теоремы о пределе целой рациональной функции имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Но полученное выражение есть не что иное, как значение заданной функции при $x = a$, т. е. $f(a)$, и тем самым мы убедились в том, что выполняется соотношение (20.1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, а по-

тому и заключаем, что многочлен непрерывен всюду, т. е. при любом значении x .

Задача 20,3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна для всех значений x , за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.

Дробно-рациональная функция определена для всех значений x , кроме тех, которые знаменатель обращают в нуль. Пусть a — произвольное число, такое, что $Q(a) \neq 0$. Из соотношения (14,3) следует, что $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a)$, т. е. соотношение (20,1) выполнено,

и мы заключаем, что дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x , кроме тех из них, которые обращают знаменатель в нуль, т. е. дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x , при которых она определена.

Задача 20,4 (для самостоятельного решения). При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ. Функция непрерывна всюду, кроме значений $x = 2$ и $x = 4$, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. О непрерывности функции в этих точках не может быть и речи, так как они не принадлежат области определения функции.

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$,

Ответ. Функция непрерывна при всех значениях x , кроме $x = 0$. Значение $x = 0$ не принадлежит области определения функции: $f(0)$ не существует.

Упражнения, связанные с определением приращения функции

Эти упражнения будут приводиться и на следующем практическом занятии. Читатель должен приобрести прочные навыки в определении приращения функции, так как с необходимостью определять приращение функции приходится очень часто встречаться.

Задача 20,6. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.

Решение. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$. У нас $f(x) = x^2$, а потому $f(x_2) = f(4) = 4^2 = 16$, $f(x_1) = f(3) = 3^2 = 9$, а приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7$.

Задача 20,7. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Решение. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Найдем $f(x + \Delta x)$. Так как у нас $f(x) = x^3$, то $f(x + \Delta x)$ получим заменой x на $x + \Delta x$ в выражении функции $f(x)$: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$, а потому

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3;$$

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Пользуясь этой формулой, вычислите, чему равно приращение Δy функции, когда x от значения $x_1 = 2$ переходит к значению $x_2 = 2,01$.

Ответ. 0,120 601.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к новому значению $x_2 = 3$.

Ответ. $\Delta y = 19$.

Задача 20,9. Найти приращение Δy функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Решение. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. У нас $f(x) = \sin x$. Мы найдем $f(x + \Delta x)$, если заменим x на $x + \Delta x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x); \quad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

и, применяя формулу

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

получим

$$\Delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \quad (20,6)$$

Задача 20,10 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $y = \cos x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Ответ. $\Delta y = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \quad (20,7)$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения). Найти приращение функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$ к значению $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 20,12. Найти приращение функции $y = a^x$.

Решение. $f(x) = a^x; \quad f(x + \Delta x) = a^{x+\Delta x}; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1). \quad (20,8)$$

Задача 20,13. Найти приращение функции $y = \ln x$.

Решение. У нас $f(x) = \ln x$; $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x;$$

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}; \quad \Delta y = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Задача 20,14 (для самостоятельного решения). Найти приращение ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к значению $t + \Delta t$.

Ответ. $\Delta S = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$.

Задача 20,15. Доказать, что при $x = 0$ функция $\sin x$ непрерывна.

Решение. Мы должны обнаружить, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Учащийся не должен думать, что мы здесь имеем право просто подставить под знак минуса нуль вместо x . Это мы имели бы право сделать, если бы непрерывность функции $\sin x$ при $x = 0$ была уже доказана.

Рассмотрим окружность радиуса $OA = 1$ (фиг. 20,4 а). Тогда

$$AD = DC = |\sin x|;$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = |x|.$$

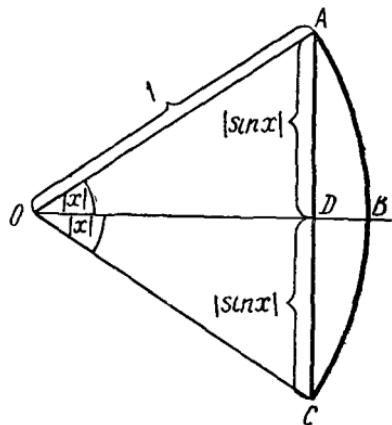
Отрезок AD короче дуги \overline{AB} , а потому $|\sin x| < |x|$. Если теперь угол x уменьшать, делая его все меньшим и меньшим по абсолютной величине, мы можем и синус этого угла сделать по абсолютному значению сколь угодно малым, а это значит, что при $x \rightarrow 0$ $\sin x$ есть величина бесконечно малая, и ее предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0.$$

И так как здесь выполняется соотношение (20,1): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, то при $x = 0$ функция $\sin x$ действительно непрерывна.

Задача 20,16. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x .

Решение. В задаче 20,9 для определения приращения $f(x) = \sin x$ была получена формула (29,6), верная при любом значении x .



Фиг. 20,4а.

Воспользуемся теперь вторым определением непрерывной функции (20,2) и докажем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

На основании результата предыдущей задачи $\sin \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$, когда $\Delta x \rightarrow 0$; что касается $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$, то он величина ограниченная при любом значении x : $|\cos x| \leq 1$. Произведение же величины бесконечной малой на ограниченную есть величина бесконечно малая, поэтому, когда $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Так как

это выполняется при любом значении x , то мы теперь вправе утверждать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x (иначе говорят: «непрерывна всюду», «непрерывна на всей числовой оси»). Теперь уже, определяя предел $\sin x$ при $x \rightarrow a$, мы вправе с полным основанием писать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при всех значениях x .

Указание. Воспользоваться формулой (20,7).

Задача 20,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ непрерывны в любой точке своей области существования.

Указание. Использовать непрерывность всюду функций $\sin x$ и $\cos x$ и теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций.

Упражнения, связанные со вторым определением непрерывной функции

Задача 20,19. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 2$;

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 10x\Delta x - 6\Delta x + 5\Delta x^2 = \\ &= (10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2.\end{aligned}$$

Найдем теперь предел Δy при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2] = 0$$

при любом значении x , что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении x .

Задача 20,20 (для самостоятельного решения). Пользуясь вторым определением непрерывной функции, доказать, что функция $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывна при любом значении x .

Указание. Найти Δy , после чего перейти к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Задача 20,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x = 3$ функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

Указание. Составить $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3)$ и найти $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$.

Задача 20,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ непрерывна при любом значении x .

Указание. Определить Δy , после чего перейти к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Упражнения, связанные с классификацией точек разрыва.

Задача 20,23. Испытать на непрерывность при $x = 1$ функцию

$$f(x) = 2 + \frac{1}{1 + 2^{1-x}}.$$

Решение. Так как знаменатель $1 - x$ дроби равен нулю при $x = 1$, то $f(x)$ разрывна при $x = 1$. Установим характер этой точки разрыва. Найдем сначала левосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow 0-1} f(x)$.

Если $x \rightarrow 1 - 0$, то можно положить $x = 1 - \alpha$ ($\alpha > 0$) и считать, что α , оставаясь положительной, стремится к нулю. Заменив x на $1 - \alpha$,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = 2,$$

так как при $\alpha \rightarrow +0$ величина $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно большая, $2^{\frac{1}{\alpha}}$ также бесконечно велика, $1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}$ — бесконечно большая величина, обратная ей величина $\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — бесконечно мала:

$$1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

$$\text{а потому } \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = 2.$$

Таким образом

$$f(1 - 0) = 2.$$

Теперь определим правосторонний предел функции. Если $x \rightarrow 1 + 0$, можно положить $x = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) и считать, что α , оставаясь положительной, стремится к нулю.

Тогда, заменяя x на $1 + \alpha$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{1-(1+\alpha)}} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} \right) = 3,$$

так как при $\alpha \rightarrow +0$, $\frac{1}{\alpha}$ и $2^{\frac{1}{\alpha}}$ — величины бесконечно большие, то $2^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — величина бесконечно малая, а поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} (1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}) = 1; \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} = 1; \text{ а } \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} \right) = 3$$

и, значит, $f(1 + 0) = 3$.

Итак, у функции существуют и левосторонний предел $f(1 - 0) = 2$, и правосторонний предел $f(1 + 0) = 3$, но между собой они не равны. Из этого мы заключаем, что точка $x = 1$ является для заданной функции точкой разрыва первого рода.

Задача 20,24 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$.

Указание. 1) Найти левосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)$ (положить $x = 2 - \alpha$ ($\alpha > 0$) и найти предел полученной функции при $\alpha \rightarrow +0$). Получится, что $f(2 - 0) = \frac{2}{3}$. 2) Найти правосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)$ (положить $x = 2 + \alpha$ ($\alpha > 0$) и найти предел полученной функции при $\alpha \rightarrow +0$). Получится, что $f(2+0) = 0$.

Ответ. Точка $x = 2$ — точка разрыва первого рода: $f(2 - 0)$ и $f(2 + 0)$ существуют, но между собой не равны.

Задача 20,25 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$.

Указание. При $x = 0$ функция терпит разрыв. Левосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{1}{3}$; $f(-0) = \frac{1}{3}$.

Правосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$: $f(+0) = 0$ (символы 1) $x \rightarrow -0$ и 2) $x \rightarrow +0$ означают, что 1) x стремится к нулю, оставаясь меньше нуля; 2) x стремится к нулю, оставаясь больше нуля).

Левосторонний и правосторонний пределы функции существуют $f(-0) = \frac{1}{3}$, $f(+0) = 0$, но между собою не равны: $f(-0) \neq f(+0)$.

Заключение. Точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20,26 (для самостоятельного решения). Функцию $f(x) = \frac{5}{2 + 7^{\frac{5-x}{4}}}$ испытать на непрерывность при $x = 5$.

Ответ. $f(5 - 0) = 0$, $f(5 + 0) = \frac{5}{2}$; $f(5 - 0) \neq f(5 + 0)$.

Точка $x = 5$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20,27 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x = 0$. Начертить график.

Ответ. Разрыв второго рода: $f(-0) = 0$, $f(+0) = +\infty$.

Задача 20, 28 Какого рода

разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

Решение. Левосторонний предел функции $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$, а ее правосторонний предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$. Таким образом, здесь не существуют ни предел слева, ни предел справа, а потому точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Задача 20,29 (для самостоятельного решения). Какого рода

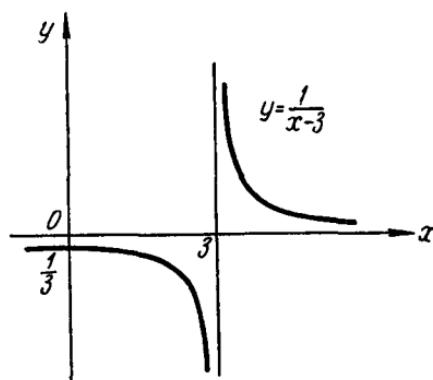
разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x-3}$ в точке $x = 3$ (фиг. 20,5).

Ответ. Второго рода; при $x \rightarrow 3$ не существуют ни предел слева, ни предел справа.

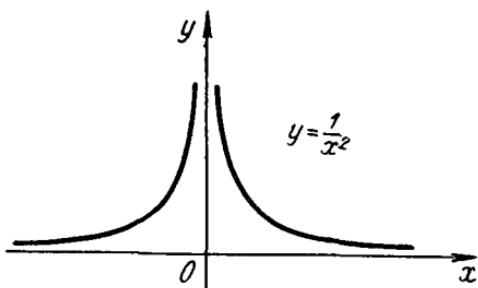
Задача 20,30. (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x^2}$ в точке $x = 0$?

Ответ. Второго рода (фиг. 20,6).

Задача 20,31 (для самостоятельного решения). Определить точки разрыва функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ и род этих точек разрыва.



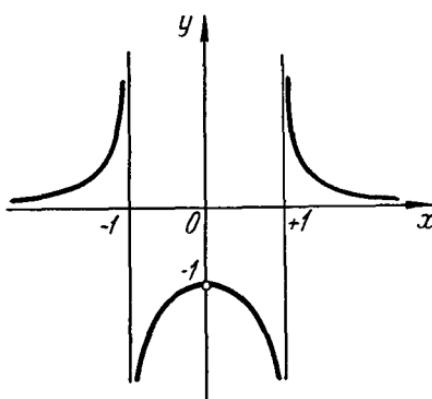
Фиг. 20,5.



Фиг. 20,6.

Ответ. Точка $x = -1$ и $x = +1$ — точки разрыва второго рода (фиг. 20,7).

Задача 20,32. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

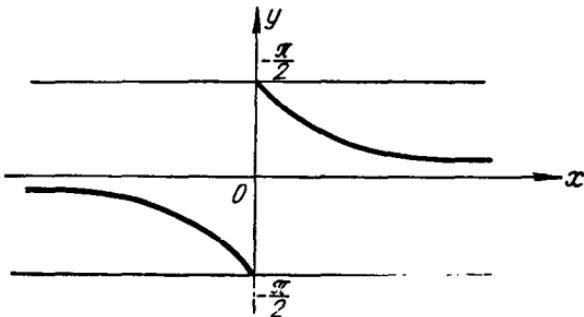


Фиг. 20,7

Решение. В точке $x = 0$

функция $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ не существует. Определим левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, так как при $x \rightarrow -0$ величина $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, а $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$; $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$ потому, что при $x \rightarrow +0$ величина $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, а $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \rightarrow +\frac{\pi}{2}$; $f(+0) = +\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, оба предела — левосторонний и правосторонний — в точке $x = 0$ существуют, но между собою не равны: $f(-0) \neq f(+0)$, и точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода (фиг. 20,8).



Фиг. 20,8.

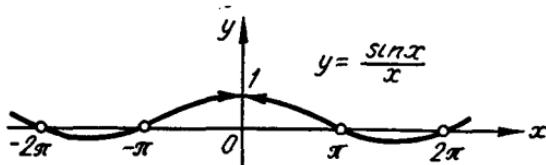
Задача 20,33. Какого рода разрыв имеет функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$?

Решение. В этой точке функция разрывна, так как $f(0)$ не существует. Однако нам известно, что при стремлении x к нулю по любому закону ($x \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и, таким образом, существуют левосторонний предел функции $f(-0)$, правосторонний предел функции $f(+0)$ и они между собой равны: $f(-0) = f(+0) = 1$. Но $f(0)$ не существует. На кривой, которая является графиком этой функции, отсутствует точка (она как бы «вырвана»), абсцисса которой равна нулю. Если условиться, что при $x = 0$ функция $\frac{\sin x}{x} = 1$, то тем самым график функции станет сплошным (непрерывным), и разрыв будет «устранен» (фиг. 20,9).

Заключение: Для функции $\frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является точкой «устранимого» разрыва, так как $f(-0) = f(+0)$, и функция



Фиг. 20,9.

в этой точке может быть доопределена так, что можно взять $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Замечание. Термин «устранимый» взят в кавычки потому, что фактически разрыв функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение функции в этой точке равно 1. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую на ней точку $(0, 1)$.

Это замечание следует иметь в виду и при решении других задач, в которых разрыв будет «устранимым».

Задача 20,34. Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2}$ в точке $x = 2$.

Решение. Так как при $x = 2$ функция не существует и тем самым нарушено первое условие непрерывности, то в этой точке функция терпит разрыв. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 2x + 4) = 12, \quad f(2-0) = 12;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 + 2x + 4) = 12; \quad f(2+0) = 12.$$

Таким образом, существует и предел этой функции при $x \rightarrow 2$, так как $f(2-0) = f(2+0)$. В точке $x = 2$ разрыв можно «устра-

нить», если значение функции в этой точке принять равным 12, т. е. если условиться, что $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = 12$.

Точка $x = 2$ — точка «устранимого» разрыва. Графиком функции $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2}$ является парабола (фиг. 20, 10), на которой нет точки с абсциссой $x = 2$. На графике эта точка обозначена кружком и к ней направлены стрелки. Сплошной ход кривой в этой точке оборвался.

Слева и справа от точки $x = 2$ график функции — непрерывная линия.

Задача 20,35 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и начертить график функции. 2) Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы дополненная этим значением функция была непрерывна при $x = -3$?

Ответ. Точка $x = -3$ — точка «устранимого» разрыва. Следует взять $f(-3) = -6$.

Задача 20,36 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию при $x = -1$, чтобы при $x = -1$ она была непрерывной?

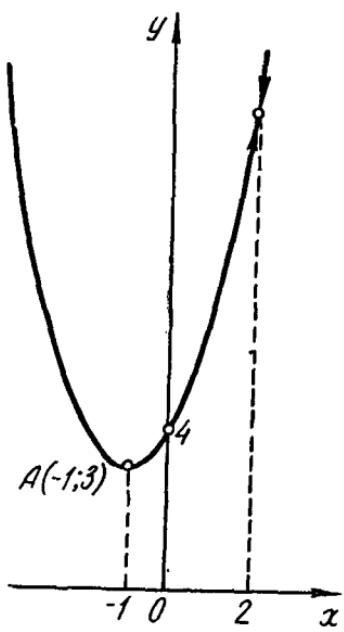
Задача 20,37. Доказать, что функция $f(x) = x^3 \cos^2 x + \frac{x^4}{x^2 + 1}$ непрерывна при всех значениях x .

Решение. Воспользуемся теоремами о сумме, произведении и частном непрерывных функций. Так как функция $\cos x$ непрерывна при всех значениях x , то и ее квадрат есть функция, непрерывная при всех значениях x , как произведение двух непрерывных функций: $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$.

Функция $\varphi(x) = x$ непрерывна всюду, а потому и функция $\varphi_1(x) = x^3$ также всюду непрерывна, как произведение непрерывных функций: $\varphi_1(x) = (x)^3 = xxx$.

Произведение $x^3 \cos^2 x$ — функция непрерывная, как произведение непрерывных функций x^3 и $\cos^2 x$.

Второе слагаемое $\frac{x^4}{x^2 + 1}$ — функция непрерывная, как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель дроби не имеет



Фиг. 20,10.

действительных корней (уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x .

Задача 20,38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

$$1) f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}; \quad 2) \varphi(x) = \frac{\sin x}{1-x^3}; \quad 3) \varphi(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin x}.$$

Ответ. 1) Функция непрерывна при всех значениях x , кроме значений $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x , кроме $x=1$.

3) Функция непрерывна для всех x , кроме $x=n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы проходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения другой величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. Средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x + \Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:

$$V_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (21,1)$$

Определение 2. Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx :

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V_{cp};$$

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования