действительных корней (уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x.

Задача 20,38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

1) $f(x)=\frac{x^2}{9-x^2}$; 2) $\varphi(x)=\frac{\sin x}{1-x^3}$; 3) $\varphi(x)=\frac{x^2+x+1}{\sin x}$.

Ответ. 1) Функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1=-3$ и $x_2=3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$

3) Функция непрерывна для всех x, кроме $x=n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы проходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения другой величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. *Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x+\Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:*

$$V_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{j(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,1)$$

Определение 2. *Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:*

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}V_{\text{ср}};$$

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{t(x+\Delta x)-j(x)}{\Delta x}. \qquad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования

функции, но после того как этот выбор сделан, значение x должно оставаться постоянным, а изменению может подвергаться только Δx).

Найденный из (21,2) предел будет являться функцией x. О скорости изменения функции при данном значении x имеет смысл говорить лишь в том случае, когда предел (21,2) существует и не зависит от того, каким способом Δx стремится к нулю.

Функция, полученная в результате определения предела (21,2), называется производной функцией от функции $f(x)$. Сокращенно найденная из (21,2) функция называется просто производной.

Определение производной. *Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение арумента стремится к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.*

Производная функции при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

Обозначение производной. Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, а ее значение при $x = x_0$ обозначается так:

$$y'_x(x_0);\ y'(x_0);\ y'_0;\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0};f'(x_0).$$

Когда мы нашли производную функцию $f'(x)$, тем самым мы нашли скорость изменения данной функции в точке x.

Механическое значение производной

1. Средняя скорость. Закон движения точки считается заданным, если ее путь s* есть известная функция времени t, т. е. если

$$s = f(t) \tag{21,3}$$

(s — расстояние движущегося тела от начала отсчета). Будем считать, что $s > 0$, если оно находится справа от начала отсчета и $s < 0$, если оно находится слева от начала отсчета. Средняя скорость движения $V_{ср}$ за время момента t до момента $t + \Delta t$ вычисляется по формуле

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{21,4}$$

Истинная скорость движения в момент времени t по определению есть предел, к которому стремится средняя скорость $V_{ср}$ за промежуток времени Δt, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$. Или

* Предполагается, что точка движется в одном направлении.

иначе: скоростью движения в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени Δt стремится к нулю.

Скорость в момент времени t определяется равенствами

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (21,5)$$

Из сравнения (21,5) с (21,2) видно, что скорость точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

Геометрическое значение производной

Производная от функции $f(x)$, вычисленная при заданном значении x, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x.*

Упражнения этого практического занятия имеют целью закрепить у студента понимание определения производной, ее механического и геометрического значения.

Мы будем решать задачи, в которых производная вычисляется не из готовой формулы, как это делается на следующих практических занятиях, а непосредственно, исходя из ее определения.

После твердого усвоения определения производной мы перейдем к упражнениям, которые помогут выработать прочные навыки вычисления производных.

Задача 21,1. Вычислить производную функции $y = x^2$ при $x = 3$.

Решение. Проведем решение этой задачи двумя способами:

1) сначала найдем производную как функцию x, а потом вычислим ее значение при $x = 3$, т. е. $y'(3)$,

2) значение производной будем вычислять, исходя из значения $x = 3$:

$$y = x^2, \text{ т. е. } f(x) = x^2;$$
$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Теперь найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x$.

Разделим теперь приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

В этом месте мы можем сказать, что найденное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть не что иное, как средняя скорость изменения данной функции $f(x) = x^2$ в промежутке $(x, x + \Delta x)$.

---

* Положительным направлением на касательной считается то, в котором возрастает абсцисса.

Для того чтобы найти производную y' этой функции, нужно найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. Переходя к пределу, получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

(еще раз напоминаем, что здесь при отыскании предела величину x мы должны считать постоянной).

Итак, $x' = 2x$.

При $x = 3$ значение производной $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Найденное число 6 есть не что иное, как скорость изменения функции $f(x) = x^2$ при $x = 3$.

2) Найдем теперь значение производной данной функции при $x = 3$, минуя нахождение производной, как функции x.

У нас $f(x) = x^2$; $f(3) = 3^2$.

Перейдем от значения $x=3$ к значению $x = 3 + \Delta x$;

$$f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2; \quad f(3) = 9;$$

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2 = (6 + \Delta x)\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 + \Delta x; \quad y'(3 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Найдя производную $y'(3)$, мы нашли и тангенс угла между положительными направлениями оси Ox и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$, т. е. угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

Задача 21,2 (для самостоятельного решения). Вычислить производную функции $y = x^3$ при $x = 2$.

Дать геометрическое истолкование полученного результата. Задачу решить двумя способами по примеру решения предыдущей задачи. Найти среднюю скорость изменения функции в промежутке от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}1$.

Ответ. $y'(2) = 12$; средняя скорость изменения функции на интервале $(3; 3{,}1)$ $v_{ср} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$. Подставляя сюда $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, получим $v_{ср} = 27{,}91$.

Задача 21,3. Точка движется по прямой по закону $S = t^3$, где S — путь, измеряемый в сантиметрах, а t — время в секундах. Найти среднюю скорость точки за время от $t = 2$ *сек* до $t_1 = (2 + \Delta t)$ *сек*, считая, что $\Delta t = 1$; 0,5, 0,01; 0,001. Вычислить также истинную скорость точки в момент $t = 2$ *сек*.

Решение. Согласно результату предыдущей задачи, если $y = x^3$, то $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$. Так как в задаче, которую мы решаем, функция обозначена буквой S, а аргумент буквой t, то выражение для Δy надо переписать, заменив y на S, а x на t:

$$\Delta S = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3,$$

а средняя скорость будет равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Если $\Delta t = 1$ *сек*, то, приняв, что $t = 2$ *сек*, получим

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}01$ *сек*:

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 12{,}0601 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}001$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 = 12{,}006\,001 \text{ см/сек}.$$

Найдем теперь истинную скорость в момент времени $t = 2$ *сек*. У нас

$$V_{ср} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Истинная скорость по (21,4) будет равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

При $t = 2$ *сек* получаем $V = 3 \cdot 2^2 = 12$ *см/сек*.

Все полученные нами средние скорости отличаются от истинной, но из рассмотрения полученных значений средних скоростей мы приходим к выводу, что они тем ближе к истинной скорости в момент $t = 2$ *сек*, чем меньше Δt.

Задача 21,4 (для самостоятельного решения). Точка движется по прямой по закону $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t — в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = (1 + \Delta t)$, считая $\Delta t = 0{,}5$; $0{,}3$; $0{,}1$.

Определить также истинную скорость в момент $t = 1$ *сек*.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Ответ. При $\Delta t = 0{,}5$ $V_{ср} = 15{,}25$ *см/сек*; при $\Delta t = 0{,}1$ $V_{ср} = 10{,}21$ *см/сек*; $V = 15t^2 - 6t$, $V(1) = 9$ *см/сек*.

Задача 21,5. Функция $y = \frac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить производную при $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную y' как функцию x, а потом вычислим $y'(1)$.

Наращенное значение функции $y + \Delta y$ мы найдем, если заменим в аналитическом выражении функции x на $x + \Delta x$. Имеем

$$y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1}; \quad \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x + 1}{3x + 1} =$$

$$= -\frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}, \text{ а } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}.$$

Эта формула дает выражение средней скорости изменения данной функции на интервале $(x, x+\Delta x)$. Чтобы найти производную, перейдем к пределу, устремляя Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)} \right\};$$

$$y' = -\frac{1}{(3x+1)^2}; \quad y'(1) = -\frac{1}{16}.$$

Найденный результат геометрически истолковывается так: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{2x+1}{3x+1}$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен $-\frac{1}{16}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{16}$.

Если точка движется по прямой по закону $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, где x — время в секундах, а y — путь в метрах, то найденное значение производной $y'(1) = -\frac{1}{16}$ — скорость движения в момент времени $t = 1$ *сек*, а знак минус у скорости показывает, что с увеличением времени расстояние движущейся точки от начала отсчета пути уменьшается.

Эту задачу можно решить и иначе: вычислить значение производной заданной функции при $x = 1$, минуя определение ее производной при любом x.

Перейдем от значения $x = 1$ к значению $x = 1 + \Delta x$. У нас

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}. \quad \text{Тогда } f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{4};$$

$$f(1+\Delta x) = \frac{2(1+\Delta x)+1}{3(1+\Delta x)+1} = \frac{2\Delta x + 3}{3\Delta x + 4};$$

в точке $x = 1$ приращение функции $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$;

$$\Delta y = \frac{2\Delta x + 3}{3\Delta x + 4} - \frac{3}{4} = \frac{-\Delta x}{4(3\Delta x + 4)}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4(3\Delta x + 4)};$$

а

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{4(3\Delta x + 4)} = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом, найдена производная заданной функции при $x = 1$ без определения производной как функции x.

Задача 21,6 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 9$.

Ответ. $y'(9) = \frac{1}{6}$.

Задача 21,7 (для самостоятельного решения). Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть величина постоянная.

Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ при $x = \sqrt{5}$.

Указания: 1) $\Delta y = \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$; 2) при определении $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Ответ. $y'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21,9 (для самостоятельного решения). Закон движения точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ (s — в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

Ответ. $V = 3t^2 - 6t + 3$; $V = 0$ при $t = 1$ *сек*.

Задача 21,10 (для самостоятельного решения). Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$; $s_2 = t^3 - 3t$. В какой момент времени их скорости равны?

Ответ. $t = 2$ *сек* ($V_1 = 3t^2 - 10t + 17$; $V_2 = 3t^2 - 3$).

Задача 21,11 (для самостоятельного решения). Тело, брошенное вверх, движется по закону $s = -4{,}905t^2 + 981t + 950$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти: 1) скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость; 2) в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Ответ. 1) $V = -9{,}81t + 981$; $V_0 = 981$ *м/сек*; 2) $t = 100$ *сек*; $s(100) = 50$ *км*.

ДВАДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование алгебраических функций.

Это практическое занятие отводится для упражнений в определении производных алгебраических функций. Эти упражнения продолжаются и на следующем практическом занятии. Операция определения производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных мы будем вести не непосредственно, исходя из определения производной, а по формулам, с выводом которых читатель уже знаком. Здесь приводится для ссылок и справок.

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Во всех приведенных ниже формулах функции u и v считаются функциями независимой переменной x: $u = u(x)$; $v = v(x)$. Эту таблицу читатель должен твердо выучить наизусть.

$$y = c \ (c \text{ — постоянная}); \ y' = 0 \qquad (22,1)$$