Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ при $x = \sqrt{5}$.

Указания: 1) $\Delta y = \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$; 2) при определении $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Ответ. $y'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21,9 (для самостоятельного решения). Закон движения точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ (s — в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

Ответ. $V = 3t^2 - 6t + 3$; $V = 0$ при $t = 1$ *сек*.

Задача 21,10 (для самостоятельного решения). Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$; $s_2 = t^3 - 3t$. В какой момент времени их скорости равны?

Ответ. $t = 2$ *сек* ($V_1 = 3t^2 - 10t + 17$; $V_2 = 3t^2 - 3$).

Задача 21,11 (для самостоятельного решения). Тело, брошенное вверх, движется по закону $s = -4{,}905t^2 + 981t + 950$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти: 1) скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость; 2) в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Ответ. 1) $V = -9{,}81t + 981$; $V_0 = 981$ *м/сек*; 2) $t = 100$ *сек*; $s(100) = 50$ *км*.

ДВАДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование алгебраических функций.

Это практическое занятие отводится для упражнений в определении производных алгебраических функций. Эти упражнения продолжаются и на следующем практическом занятии. Операция определения производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных мы будем вести не непосредственно, исходя из определения производной, а по формулам, с выводом которых читатель уже знаком. Здесь приводится для ссылок и справок.

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Во всех приведенных ниже формулах функции u и v считаются функциями независимой переменной x: $u = u(x)$; $v = v(x)$. Эту таблицу читатель должен твердо выучить наизусть.

$$y = c \ (c \text{ — постоянная}); \ y' = 0 \qquad (22,1)$$

(производная постоянной величины равна нулю);

$$y = x;\ y' = 1 \qquad (22, 2)$$

(производная независимой переменной равна 1);

$$y = cu\ \ (c \text{ — постоянная});\ y' = cu' \qquad (22, 3)$$

(постоянный множитель можно выносить за знак производной)

$$y = u \pm v;\ y' = u' \pm v' \qquad (22, 4)$$

$$y = v \cdot u;\ y' = u'v + uv' \qquad (22, 5)$$

$$y = \frac{u}{v},\ y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (22, 6)$$

$$y = \frac{a}{u};\ y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u' \ \ (a \text{ — постоянная величина}); \qquad (22, 7)$$

$$y = u^n;\ y' = nu^{n-1} \cdot u' \qquad (22, 8)$$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u};\ y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'; \qquad (22, 9)$$

$$y = a^u;\ y' = a^u \cdot \ln a \cdot u';\ y = e^u;\ y' = e^u u';\ a > 0,\ a \neq 1; \qquad (22, 10)$$

$$y = \log_a u; \qquad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}; \qquad (22, 11)$$

$$y = \ln u; \qquad y' = \frac{1}{u} u'; \qquad (22, 12)$$

$$y = \sin u; \qquad y' = \cos u \cdot u'; \qquad (22, 13)$$

$$y = \cos u; \qquad y' = -\sin u \cdot u'; \qquad (22, 14)$$

$$y = \operatorname{tg} u; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'; \qquad (22, 15)$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'; \qquad (22, 16)$$

$$y = \sec y; \qquad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'; \qquad (22, 17)$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \qquad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'; \qquad (22, 18)$$

$$y = \arcsin u; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'; \qquad (22, 19)$$

$$y = \arccos u; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'; \qquad (22, 20)$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \qquad y' = \frac{1}{1 + u^2} u'; \qquad (22, 21)$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{1 + u^2} u'. \qquad (22, 22)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(u)$, а u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной x: $u = \varphi(x)$, то, таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

Функция y называется в этом случае сложной функцией x. Переменная u называется промежуточной переменной. Производная сложной функции определяется на основании такой теоремы:

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, причем для соответствующих друг другу значений x и u существуют конечные производные y'_u и u'_x. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет конечную производную по x, и эта производная определяется по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x{}^*, \tag{22, 23}$$

причем производная y'_u вычисляется так, как если бы u было независимой переменной. Короче: производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена. Например, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, т. е. если $y = f\{\varphi[(\psi(x)]\}$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{22, 24}$$

Формулы (22, 23) и (22, 24) дифференцирования сложной функции являются очень важными.

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем замечание, которым нам неоднократно придется пользоваться:

Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в формулах (22, 3) — (22,22) будем полагать, что $u = x$, т. е. u — независимая переменная, а тогда по формуле (22, 2) $u'_x = 1$ (производная независимой переменной равна единице), и поэтому, применяя указанные формулы, на u' умножать не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу, а, как известно, умножение на единицу не изменяет произведения.

Сначала решим самые простые задачи.

Задача 22, 1. Найти производные функций:

$$1)\ y = x^4;\ 2)\ y = x^5;\ 3)\ y = \sqrt{x};\ 4)\ y = \sqrt[4]{x^3}.$$

Решение. Учитывая замечание, которое только что сделано, по формуле (22, 8), полагая в ней $u = x$, имеем:

1) В этом примере показатель степени $n = 4$, а потому $y' = 4x^3$;

2) Здесь $n = 5$, а потому $y' = 5x^4$;

---

* Индексы у производных указывают на то, по какому переменному производится дифференцирование.

3) Если $y=\sqrt{x}$, то, переписав пример в виде $y=x^{\frac{1}{2}}$, полагая в формуле (22, 8) $n=\frac{1}{2}$, получаем $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (22, 9).

4) Пример можно переписать так: $y=x^{\frac{3}{4}}$. Здесь $n=\frac{3}{4}$, а $y'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Задача 22,2. Найти производные функций:

1) $y=5x^3$; 2) $y=-4x^2$; 3) $y=7\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{8}{x^2}$, 5) $y=4\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. При решении всех этих примеров можно пользоваться формулой (22, 8) и надо учесть, что постоянный множитель можно выносить за знак производной (формула (22,3)).

1) $y'=5(x^3)'$ (здесь постоянный множитель 5 вынесен за знак производной); $y'=5\cdot 3x^2=15x^2$ ($(x^3)'=3x^2$);

2) $y'=-4(x^2)'=-4\cdot 2x=-8x$ (постоянный множитель -4 вынесен за знак производной, а $(x^2)'=2x$);

3) $y=7x^{\frac{1}{2}}$; $y'=7(x^{\frac{1}{2}})'=7\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$ (постоянный множитель 7 вынесен за знак производной, а $(x^{\frac{1}{2}})'=$ $=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$). Здесь можно было сразу воспользоваться формулой (22, 9), и тогда, если $y=7\sqrt{x}$, то $y'=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Учащемуся рекомендуется запомнить (это очень часто встречается), что если $y=\sqrt{x}$, то $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) Перепишем пример в виде $y=8x^{-2}$, тогда $y'=8(x^{-2})'=$ $=8(-2x^{-3})$, $y'=-\frac{16}{x^3}$ (постоянный множитель 8 вынесен за знак производной, а $(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$). Можно было сразу воспользоваться формулой (22, 7), взяв в ней $a=8$; $u=x^2$, а $u'=2x$. Здесь уже на u' придется умножить, так как u — не независимая переменная, а ее функция: $u=x^2$.

Имеем $y=\frac{8}{x^2}$; $y'=-\frac{8}{x^4}\underbrace{(x^2)'}_{\text{производная знаменателя}}=-\frac{8}{x^4}2x=-\frac{16}{x^4}$, т. е. то же, что и раньше, но функцию, данную для дифференцирования, не пришлось преобразовать.

5) Данную функцию перепишем в виде $y = 4x^{-\frac{2}{3}}$: тогда $y' = 4(x^{-\frac{2}{3}})' = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22, 3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = 7x^6$; 2) $y = 8\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{x^5}$.

Ответ. 1) $y' = 42x^5$; 2) $y' = \frac{4}{\sqrt{x}}$; 3) $y' = -\frac{20}{x^6}$.

Задача 22, 4. Найти производные функции:

1) $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y = -\frac{5}{4x^3}$; 4) $y = \frac{7\sqrt{x}}{8}$.

Решение. Здесь для решения всех примеров удобно применить формулу (22,7):

1) $y' = -\frac{6}{(\sqrt{x})^2} \underbrace{(\sqrt{x})'}_{\text{производная знаменателя}} = -\frac{6}{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}}$;

2) $y' = -\frac{4}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} \underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}_{\text{производная знаменателя}} = -\frac{4}{\sqrt[3]{x^4}} (x^{\frac{2}{3}})' = -\frac{4}{x\sqrt[3]{x}} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ (здесь можно было также воспользоваться формулой (22,8), но данную функцию переписать в виде $y = 4x^{-\frac{2}{3}}$, тогда $y' = 4(x^{-\frac{2}{3}})' = 4\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$);

3) $y' = \frac{5}{(4x^3)^2} \underbrace{(4x^3)'}_{\text{производная знаменателя}} = \frac{5}{16x^6} 4(x^3)' = \frac{20}{16x^6} 3x^2 = \frac{15}{4x^4}$ (можно поступить и иначе: данную функцию переписать в виде

$$y = -\frac{5}{4}x^{-3}; \quad y' = -\frac{5}{4}(x^{-3})' = -\frac{15}{4}x^{-4} = \frac{15}{4x^4}\Big);$$

4) $y' = \frac{7}{8}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{16\sqrt{x}}$.

Если дифференцируется дробь с постоянным знаменателем, то применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби не следует, а поступить надо так: взять производную только от числителя дроби, а знаменатель оставить без изменения:

$$y = \frac{u}{c} = \frac{1}{c}u; \quad y' = \frac{1}{c}u' = \frac{u'}{c}.$$

Следует запомнить: ***производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель.***

Использование здесь формулы (22,6) привело бы к ненужному усложнению: $y=\frac{u}{c}$; $y'=\frac{u'c-c'u}{c^2}=\frac{u'c-0\cdot u}{c^2}=\frac{u'c}{c^2}=\frac{u'}{c}$ ($c'=0$ потому, что производная постоянной величины равна нулю).

Если отыскивается производная от дроби с постоянным числителем, то также не следует применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби, а надо воспользоваться формулой (22,7) для дифференцирования дроби с постоянным числителем:

$$y=\frac{a}{u};\quad y'=-\frac{a}{u^2}u'.$$

Если здесь пользоваться формулой для дифференцирования дроби, то получим

$$y=\frac{a}{u};\quad y'=\frac{a'u-au'}{u^2}=\frac{0\cdot a-au'}{u^2}=-\frac{au'}{u^2}=-\frac{a}{u^2}u'.$$

Такой способ вычисления производной от дроби с постоянным числителем следует считать нецелесообразным.

Задача 22, 5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y=\frac{a}{x^n};\ 2)\ y=\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}};\ 3)\ y=\frac{\sqrt[6]{x^5}}{8};\ 4)\ y=\frac{4\sqrt{x}}{7}.$$

Ответ. 1) $y'=-\frac{an}{x^{n+1}}$; 2) $y'=-\frac{15}{4x\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $y'=\frac{5}{48\sqrt[6]{x}}$; 4) $y'=\frac{2}{7\sqrt{x}}$.

Задача 22, 6. Найти производную функции $y=5x^3-3x^2+x-1$.

Решение. Заданная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций. Известно (формула (22,4), что производная алгебраической суммы функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций, а потому $y'=(5x^3)'-(3x^2)'+x'-(1)'$. Здесь мы дифференцирование выполним без промежуточных записей:

$$y'=15x^2-6x+1;$$

производная от x равна $1: x'=1$, а производная 1 равна нулю, как производная постоянной величины.

Задача 22, 7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6+\frac{4}{7}x^7$; 3) $y=9x^7-\frac{3}{x^5}-\frac{3}{x^{11}}-\frac{a}{x^m}$;

4) $y=3x^2\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. Перейти к дробным показателям степеней.

Ответ. 1) $y' = \frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{a}$ (при дифференцировании второго слагаемого учесть, что $\sqrt{a}$ — постоянная величина, а $x' = 1$);

2) $y' = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)$;

3) $y' = 63x^6 + \frac{15}{x^6} + \frac{33}{x^{12}} + \frac{am}{x^{m+1}}$;

4) $y' = 7x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22,8 (для самостоятельного решения). Найти производные функций 1) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. **Указание.** $\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} = 5x^{\frac{8}{5}}$.

2) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ. 1) $y' = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$; 2) $y' = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2$.

Задача 22,9. Найти производную функции $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Решение. Здесь мы имеем дело со сложной функцией. Положим $u = 5x^2 + 7x + 2$. тогда $y = u^3$. Следует писать так: $y = u^3$; $u = 5x^2 + 7x + 2$.

Для того чтобы найти производную, воспользуемся формулой (22,23) для дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3u^2u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)' = \\ = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (10x + 7).$$

Однако можно обойтись и без промежуточных записей, т. е. без введения переменной u. Мы настоятельно рекомендуем читателю после того, как он сделает несколько упражнений, выполненных при помощи введения вспомогательной переменной, от введения такой переменной отказаться и дифференцирование выполнять сразу.

Формула (22,8) должна быть понята так: производная от степенной функции u^n, где u есть функция x, равна $nu^{n-1}u'$, т. е. равна показателю степени, умноженному на ту же функцию u, но в степени на единицу меньшей, а полученное произведение надо еще умножить на производную от основания степени u.

В нашем случае получаем: $y' = 3\underbrace{(5x^2+7x+2)^2}_{\text{производная степенной функции}} \cdot \underbrace{(10x+7)}_{\text{производная основания степени}}$

Выполним еще несколько аналогичных задач, но без столь подробных пояснений.

Задача 22, 10. Найти производную функции $y=(5x^3+4x^2+8)^4$.

Решение. 1) $y=u^4$, где $u=5x^3+4x^2+8$. По формуле (22,23) $y'=4u^3u'=4(5x^3+4x^2+8)^3(15x^2+8x)$ (производная от 8 равна 0). Проведем решение без введения промежуточной переменной: $y'=\underbrace{4(5x^3+4x^2+8)^3}_{\text{производная степени}}\underbrace{(15x^2+8x)}_{\text{производная степени основания}}$

Задача 22, 11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y=(5x^2+7)^3$; 2) $y=(1+5x-8x^2)^5$;

3) $y=(a+bx)^m$; 4) $y=\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^4$.

Найти производные, введя сначала промежуточную переменную, а потом минуя ее введение.

Ответ. 1) $y'=30x(5x^2+7)^2$;

2) $y'=5(1+5x-8x^2)^4(5-16x)$;

3) $y'=bm(a+bx)^{m-1}$;

4) $y'=4\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^3}\right)$.

Задача 22, 12. Найти производные функций:

1) $y=\sqrt{x^2+2}$; 2) $y=\sqrt{3x}$; 3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3}$.

Решение. 1) Положив $u=x^2+2$, получим $y=\sqrt{u}$, и поэтому на основании формулы (22,23)

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Можно было бы сразу воспользоваться формулой (22,9) для дифференцирования квадратного корня из функции, не вводя промежуточной переменной u.

Эту формулу следует понимать так: чтобы получить производную от квадратного корня из функции, надо единицу разделить на два корня квадратных из той же функции и полученную дробь умножить на производную от функции, стоящей под корнем.

Следовало поступить так: 1) $y=\sqrt{x^2+2}$; $y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}}_{\text{производная от квадратного корня из функции}}\cdot\underbrace{2x}_{\text{производная от функции, стоящей под корнем}}$

2) $y=\sqrt{3x}$; $y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x}}}_{\text{производная квадратного корня из функции}}\cdot\underbrace{3}_{\text{производная от функции, стоящей под корнем}}$

3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3}$; $y'=-\underbrace{\frac{2}{(3x^2-5)^6}}_{\text{производная дроби с постоянным числителем}}\cdot 3\underbrace{(3x^2-5)^2 6x}_{\text{производная знаменателя}}$;

$y'=-\frac{36}{(3x^2-5)^4}$.

Для упражнения выполним еще один совершенно аналогичный пример, но без введения переменной u.

Задача 22, 13. Найти производную функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. По формуле (22,7) $y'=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\text{производная дроби}}\underbrace{(\sqrt{x^2+x+1})'}_{\text{производная знаменателя дроби}}=$

$=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\text{производная дроби}}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}_{\text{производная знаменателя}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\text{производная функции, стоящей под корнем}}=-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Задача 22, 14 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sqrt{3x^2+5x+1}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$; 3) $y=$ $=\frac{10}{(4x^3-5x^2+7x-1)^4}$.

Ответ. 1) $y'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 2) $y'=-\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$;

3) $y'=-\frac{40(12x^2-10x+7)}{(4x^3-5x^2+7x-1)^5}$.

Задача 22, 15. Найти производные функций: 1) $Q=\sqrt[3]{3t-2t^2}$;

2) $S=\sqrt[4]{(2t^2-t^3)^3}$.

Решение. Перепишем пример в виде $Q=(3t-2t^2)^{\frac{1}{3}}$;

$Q'=\frac{1}{3}\underbrace{(3t-2t^2)}_{\text{производная степени}}{}^{-\frac{2}{3}}\underbrace{(3-4t)}_{\text{производная основания степени}}$. Окончательно $Q'=\frac{3-4t}{3\sqrt[3]{(3t-2t^2)^2}}$.

2) Перепишем пример в виде $S=(2t^2-t^3)^{\frac{3}{4}}$;

$$S'=\frac{3}{4}\underbrace{(2t^2-t^3)}_{\text{производная степени}}{}^{-\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{(4t-3t^2)}_{\text{производная основания степени}}.$$

Окончательно $S' = \frac{3t(4-3t)}{4\sqrt[3]{2t^2-t^3}}$.

Задача 22, 16 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}$; 2) $y = \sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$;

Ответ.

1) $y' = \frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$; 2) $y' = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

Теперь решим несколько задач, в которых требуется найти производную произведения и частного функций. Нам придется пользоваться формулами (22,5) и (22,6).

Задача 22, 17. Найти производную функций $y = x^2(5x-4)^6$.

Решение. Здесь надо продифференцировать произведение двух функций. Будем считать, что в формуле (22,5) $u = x^2$, $v = (5x-4)^6$. Каждую из этих функций мы уже умеем дифференцировать, а потому на основании указанной формулы $y' = (x^2)' \times (5x-4)^6 + x^2[(5x-4)^6]'$. Теперь выполним дифференцирование: $y' = 2x(5x-4)^6 + x^2 \cdot 6(5x-4)^5 \cdot 5$, а после упрощений получим $y' = 8x(5x-4)^5(5x-1)$.

Задача 22, 18 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = (5x^2-7x+2)(15x^2+5)^3$.

Ответ. $y = (10x-7)(15x^2+5)^3 + 90x(15x^2+5)^2(5x^2-7x+2)$.

Задача 22, 19. Найти производную функции

$$y = (3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}.$$

Решение. По формуле (22,5) имеем при $u = 3x^2+5ax-2a^2$; $v = \sqrt{a^2+3x^2}$; $y' = (3x^2+5ax-2a^2)' \cdot \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)(\sqrt{a^2+3x^2})'$.

Выполняя дифференцирование, получим $y' = (6x+5a) \times \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{a^2+3x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{производная подкоренного выражения}}$; после упрощений

$$y' = \frac{5a^3+30ax^2+27x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}}.$$

Задача 22, 20. Найти производную функции

$$y = (9a^2-6abx+5b^2x^2)\sqrt[3]{(a+bx)^2}.$$

Решение. Эту задачу мы решим без промежуточных записей (формула (22,5)):

$$y' = \underbrace{(-6ab+10b^2x)}_{\text{производная первого сомножителя}}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + (9a^2-6abx+5b^2x^2) \times$$

$$\times \underbrace{\frac{2}{3}(a+bx)^{-\frac{1}{3}} \cdot b}_{\text{производная второго сомножителя}}.$$

Теперь следует сделать упрощения, после которых должно получиться

$$y' = \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Задача 22, 21 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5+3x};$$

$$2)\ y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2};\quad 3)\ y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}};\quad 2)\ y' = \frac{2}{2x^2\sqrt{3x+x^2}};\quad 3)\ y' = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}.$$

Задача 22, 22 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5+2x)^3};\quad 2)\ y = (3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3};$$

$$3)\ y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = 7x^2\sqrt{5+2x};\quad 2)\ y' = \frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}};\quad 3)\ y' = \frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$$

Задача 22, 23. Найти производную функции $y = uvw$, где u, v, w — функции $x: u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $y = (uv)w$ и применим к ней формулу (22,5):

$$y' = (uv)'w + uvw', \text{ но } (uv)' = u'v + uv',$$

а поэтому $y' = (u'v + uv')w + uvw'$; раскрывая скобки, будем иметь окончательно

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'. \qquad (22,24)$$

Можно указать, что вообще, если $y = u_1u_2u_3 \ldots u_n$, то

$$y' = u_1'u_2u_3 \ldots u_n + u_1u_2'u_3 \ldots u_n + u_1u_2u_3' \ldots u_n + \\ + \ldots + u_1u_2u_3 \ldots u_n'.$$

Этот результат словесно выражается так: *чтобы вычислить производную произведения любого числа функций, надо продифференцировать первую функцию и умножить полученную производную на произведение всех остальных функций, затем найти производную второй функции и умножить ее на произведение всех остальных функций. Точно так же поступить со всеми функциями-сомножителями и все полученные таким образом произведения сложить.*

Задача 22, 23*а*. Найти производную функции

$$y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx}.$$

Решение. На основании формулы (22,24), полученной в предыдущей задаче,

$$y' = (2a + 3bx)'(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} +$$
$$+ (2a + 3bx)[(2a - 3bx)^2]' \sqrt{4a + 6bx} +$$
$$+ (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 (\sqrt{4a + 6bx})'.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = 3b(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx) \cdot 2 \cdot (2a - 3bx) \cdot (-3b) \times$$
$$\times \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \frac{1}{2\sqrt{4a + 6bx}} \cdot 6b$$

и после упрощений окончательно

$$y' = \frac{3}{2} b(3bx - 2a)(21bx + 2)\sqrt{4a + 6bx}.$$

Задача 22, 24 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y(4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7}.$$

Ответ.

$$y' = 28x\sqrt[3]{3x + 7}.$$

Задача 22, 25 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y = \frac{a - x}{a + x}.$$

Ответ.

$$y' = -\frac{2a}{(a + x)^2}.$$

Задача 22, 26. Найти производную функции

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (22,6) для дифференцирования дроби. При решении этой задачи и следующей будем делать подробные записи, а в дальнейшем от них откажемся. Надо научиться дифференцировать бегло, без промежуточных записей. Здесь $u = a^2 - x^2$, $v = a^2 + x^2$;

$$y' = \frac{(a^2 - x^2)'(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)'(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование в числителе, получим, что

$$y' = \frac{-2x(a^2+x^2)-2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2},$$

а после очевидных упрощений

$$y' = -\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Задача 22, 27. Найти производную функции

$$y = \frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}.$$

Решение. Применяя формулу (22,6), имеем

$$y' = \frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2)-(5-3x+x^2)'(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = \frac{(3+2x)(5-3x+x^2)-(-3+2x)(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а после упрощений

$$y' = \frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Задача 22, 28 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \frac{x}{1+x^2};\quad 2)\ y = \frac{1+x^2}{1-x^2};\quad 3)\ y = \frac{x^m}{(1-x)^n}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\quad 2)\ y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2};\quad 3)\ y' = \frac{x^{m-1}[m(1-x)+nx]}{(1-x)^{n+1}}.$$

Задача 22, 29. Найти производную функции

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. По формуле (22,6), считая $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, получаем

$$y' = \frac{x'\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'x}{(\sqrt{1+x^2})^2},$$

а выполняя дифференцирование имеем

$$y' = \frac{1\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\cdot x}{1+x^2};$$

после упрощений получим, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$