ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование тригонометрических функций.

Задача 23, 1. Найти производные функций:

1) $y = \sin kx$; 2) $y = \cos lx$; 3) $y = \operatorname{tg} px$; 4) $y = \operatorname{ctg} qx$.

Решение. 1) По формуле (22,13), полагая $u = kx$, имеем: $y = \sin u$; $u = kx$; $y' = \cos u \cdot u'$; $y' = \underbrace{\cos kx}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{k}_{\text{производная } u=kx}$; $y' = k \cos kx$.

2) По формуле (22,14), полагая

$y = \cos u$; $y = lx$; $y' = -\sin u \cdot u'$; $y' = -\underbrace{\sin lx}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{l}_{\text{производная } u=lx}$; $y' = -l \sin x$.

3) По формуле (22,15), полагая

$$y = \operatorname{tg} u;\ u = px;\ y' = \frac{1}{\cos^2 u} u';\ y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 px}}_{\text{производная тангенса}} \underbrace{p}_{\text{производная } u=px};\ y' = \frac{p}{\cos^2 px},$$

или $y' = p \sec^2 px$.

4) По формуле (22,16), полагая

$$y = \operatorname{ctg} u;\ u = qx;\ y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';\ y' = -\underbrace{\frac{1}{\sin^2 qx}}_{\text{производная котангенса}} \underbrace{q}_{\text{производная } u=qx};\ y' = -\frac{q}{\sin^2 qx}.$$

или $y' = -q \operatorname{cosec}^2 qx$.

После нескольких упражнений студент сам откажется от введения промежуточной переменной u, подразумевая ее в тех местах, где она нужна.

Задача 23, 2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \sin 5x$; 3) $y = \sin 15x$; 4) $y = \cos 4x$; 5) $y = -\cos 3x$; 6) $y = \cos 9x$.

Ответ. 1) $y' = 3 \cos 3x$; 2) $y' = 5 \cos 5x$; 3) $y' = 15 \cos 15x$ 4) $y' = -4 \sin 4x$; 5) $y' = 3 \sin 3x$; 6) $y' = -9 \sin 9x$.

Задача 23, 3. Найти производные функций:

1) $y = \sin 2x^2$; 2) $y = \sin \sqrt{x}$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{x}$; 4) $y = \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}}$

Решение. 1) Мы прежде всего вычисляем производную синуса, а так как синус берется от $2x^2$, то вычисляем производную $2x^2$. Производная данной функции равна произведению этих производных. Пользуясь формулой (22,13), получаем

$$y' = \underbrace{\cos 2x^2}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{4x}_{\text{производная } 2x^2}; \qquad y' = 4x \cos 2x^2.$$

2) При решении этого примера мы также прежде всего должны вычислить производную синуса, а так как синус вычисляется от $\sqrt{x}$, то надо взять производную от этого корня и полученные производные перемножить. Формула (22, 13) дает

$$y' = \underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

3) Здесь прежде всего надо продифференцировать тангенс, но так как он берется от дроби, то следует найти производную дроби и эти производные перемножить. По формуле (22,15) $\left(u = \frac{1+x}{x}\right)$:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{x}\right)'}_{\text{производная дроби}} = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{1\cdot x - (1+x)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1+x}{x}.$$

4) В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить. Здесь цепочка из трех звеньев:

$$y = \cos u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = \frac{1}{1+x}.$$

Производная

$$y' = -\underbrace{\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]}_{\text{производная дроби}}.$$

Окончательно

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Аналогичное упражнение выполните самостоятельно.

Задача 23, 4 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}$; 2) $y = \sqrt{\sin x}$;

3) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$; 4) $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

Ответы даются в таком виде, который позволяет проверить решение. Упрощение ответа сделайте сами.

Ответ.

$$1)\ y' = \cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1-x}}}\cdot\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]\cdot(-1);$$

$$2)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x;\quad 3)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(-\sin x);$$

$$4)\ y' = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Задача 23, 5. Найти производную функции $y = 3\sin^2 x$.

Решение. Запишем пример так: $y = 3(\sin x)^2$.

Если $u = \sin x$, то $y = 3u^2$, и тогда

$$y' = 6uu' = 6\sin x\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\u}}.$$

Теперь покажем как решить задачу, не вводя u. Прежде всего продифференцируем степень, а так как в степень возводится $\sin x$, то продифференцируем и $\sin x$. Найденные производные перемножим, постоянный множитель 3 вынесем за знак производной:

$$y' = 3\cdot\underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная сте-}\\\text{пени}}}\ \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{синуса}}};\quad y' = 6\sin x\cos x,$$

или

$$y' = 3\sin 2x.$$

Задача 23, 6. Найти производную функции $y = \cos^6 x$.

Решение. Запишем пример в виде $y = (\cos x)^6$ и положим $y = u^6$, а $u = \cos x$; тогда $y' = 6u^5u' = 6(\cos x)^5\cdot(-\sin x)$; $y' = -6\sin x\cos^5 x$.

Теперь ту же задачу решим без введения u.

У нас дифференцируется шестая степень косинуса: сначала продифференцируем степень, а так как в степень возводится косинус, то надо найти производную и от косинуса, а затем эти производные перемножить.

Итак,

$$y = \cos^6 x;\quad y' = \underbrace{6\cos^5 x}_{\substack{\text{производная}\\\text{от шестой}\\\text{степени ко-}\\\text{синуса}}}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{производная}\\\text{от } \cos x}};$$

$$y = -6\sin x\cos^5 x.$$

Теперь самостоятельно, но без введения u (u держать в уме) решите несколько аналогичных примеров.

Задача 23, 7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^4 x$;
4) $y = 5\cos^5 x$; 5) $y = 7\operatorname{tg}^6 x$; 6) $y = 8\sin^2 x$.

Ответ. 1) $y' = 3\sin^2 x\cos x$; 2) $y' = 3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x$;
3) $y' = -4\operatorname{ctg}^3 x\operatorname{cosec}^2 x$; 4) $y' = -25\cos^4 x\sin x$;
5) $y' = 42\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x$; 6) $y' = 16\sin x\cos x = 8\sin 2x$.

Задача 23, 8. Найти производную функций:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Решение. 1) Вычисляем производную от квадратного корня, а так как корень извлекается из $\sin x$, то следует вычислить производную от синуса и перемножить эти производные. Последовательно получаем

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\text{производная от квадратного корня}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная от синуса}}.$$

2) Здесь корень квадратный извлекается из суммы $\sin^2 x + 3\cos^3 4x$. Поэтому сначала вычисляем производную от квадратного корня, а потом умножаем ее на производную от подкоренного выражения:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}}}_{\text{производная корня}} [\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\text{производная от } \sin^2 x} + 3 \cdot \underbrace{3\cos^2 4x}_{\text{производная от степени cos}} \cdot \underbrace{(-\sin 4x)}_{\text{производная от } \cos 4x} \cdot \underbrace{4}_{\text{производная от } 4x}].$$

3) Сначала возьмем производную дроби, затем вычислим производную от знаменателя дроби и перемножим эти производные:

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\cos^6 x}}_{\text{производная дроби}} \cdot \underbrace{3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}_{\text{производная знаменателя дроби}} = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$$

Задача 23, 9 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin(px + g)$;

2) $y = \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 5\sin x$;

3) $y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{2}{3}\sin 6x + \sin 4x - 2\sin 2x - 5x$;

4) $y = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{3}{7}\cos 7x - \frac{8}{3}\cos 3x - 6\cos x$.

Задача 23, 10. Найти y', если

$$y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x.$$

Решение. Производную от первого, второго и третьего слагаемых будем искать, как производную от произведения

$$y' = \underbrace{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}_{\text{производная первого слагаемого}} + \underbrace{6x \cos x - 3x^2 \sin x}_{\text{производная второго слагаемого}} - \underbrace{6 \sin x - 6x \cos x}_{\text{производная третьего слагаемого}} +$$

$$+ \underbrace{6 \sin x}_{\text{производная четвертого слагаемого}};$$

после приведения подобных членов получаем $y' = x^3 \cos x$.

Задача 23, 11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 2) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x$; 4) $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right) \sin^3 x$.

Указание. При дифференцировании первого сомножителя во втором примере учесть решение третьего примера задачи 23, 8.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$; 2) $y' = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$;

3) $y' = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $y' = 5 \sin^2 x \cos^3 x$.

Задача 23, 12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \frac{1}{3} \cos x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{6} \cos 2x \sin x - \frac{3}{2} \sin x - \frac{4}{3} \operatorname{cosec} x$;

2) $y = \frac{15}{8} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$; 2) $y' = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}$.

Задача 23,12. Найти производную функции

$$y = \frac{3 \operatorname{cosec} x - 2 \sin x}{5 \cos^5 x} - \frac{16}{5} \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение. Первое слагаемое — дробь, а потому при его дифференцировании должна быть использована формула (22,6);

$$y' = \frac{1}{5}\,\frac{(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)'\cos^5 x - (\cos^5 x)'(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{\cos^{10} x} -$$

$$-\frac{16}{5}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{(-3\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x - 2\cdot\cos x)\cos^5 x - (-5\cos^4 x \sin x)\cdot(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{5\cos^{10} x} +$$

$$+\frac{32}{5}\,\frac{1}{\sin^2 2x},$$

а после упрощений окончательно получим $\left(\text{если заменить } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$, что

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^6 x}.$$

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Задача 24, 1. Найти производные функций;

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos x^m$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ (x > 0)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$.

Решение. 1) Задачу перепишем в виде

$$y = \arcsin u,\quad u = 2x.$$

Тогда по формуле (22,19)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(2x)';\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\underbrace{2}_{\substack{\text{про-}\\\text{изводная}\\\text{от}\\u=2x}};\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Можно было обойтись и без введения промежуточного аргумента. Присмотритесь к формуле (22,19). **Производная от функции $y = \arcsin u$ находится так: единица делится на квадратный корень из единицы минус квадрат той функции, которая стоит**