Решение. Первое слагаемое — дробь, а потому при его дифференцировании должна быть использована формула (22,6);

$$y' = \frac{1}{5}\frac{(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)'\cos^5 x - (\cos^5 x)'(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{\cos^{10} x} - \frac{16}{5}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{(-3\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x - 2\cdot\cos x)\cos^5 x - (-5\cos^4 x \sin x)\cdot(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{5\cos^{10} x} + \frac{32}{5}\frac{1}{\sin^2 2x},$$

а после упрощений окончательно получим (если заменить

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}),$$

что

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^6 x}.$$

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Задача 24, 1. Найти производные функций;

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos x^m$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,(x > 0)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\,(x > 0)$.

Решение. 1) Задачу перепишем в виде

$$y = \arcsin u, \quad u = 2x.$$

Тогда по формуле (22,19)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(2x)'; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\underbrace{\cdot 2}_{\substack{\text{производная} \\ \text{от} \\ u=2x}}; \quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Можно было обойтись и без введения промежуточного аргумента. Присмотритесь к формуле (22,19). **Производная от функции $y = \arcsin u$ находится так: единица делится на квадратный корень из единицы минус квадрат той функции, которая стоит**

под знаком арксинуса, и эта дробь умножается на производную этой функции. Поэтому сразу можно было бы писать:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}_{\text{производная от арксинуса}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{производная от функции, стоящей под знаком арксинуса}}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Таким образом, мы функцию u не ввели, а держали ее и уме.

2) Здесь мы используем формулу (22,20), которая только знаком отличается от формулы (22,19) и проведем решение с введением и без введения промежуточного аргумента. Перепишем задачу так:

$$y = \arccos u;\ u = x^m;\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (x^m)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{производная фуикции} \\ u=x^m}} = -\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}};$$

$(u = x^m,$ а потому $u^2 = x^{2m})$.

Теперь решим эту задачу, не вводя промежуточного аргумента.

$$y' = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2m}}}}_{\text{производная от арккосинуса}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{производная от функции, стоящей под знаком арккосинуса}}}$$

3) При решении этого примера будем пользоваться формулой (22,21). Опять-таки сначала введем промежуточный аргумент u, а потом проведем решение без этого осложнения.

Перепишем задачу так: $y = \operatorname{arctg} u;\ u = \sqrt{x};$

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (так как } u = \sqrt{x}, \text{ то } u^2 = x).$$

Запомните, что производная функции $y = \operatorname{arctg} u$ равна дроби, у которой числитель равен 1, а знаменатель равен 1 плюс квадрат функции, стоящей под знаком арктангенса, и дробь умножается на производную этой функции:

$$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x};$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{производная от арктангенса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производная от функции, стоящей под знаком арктангенса}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4) Здесь следует воспользоваться формулой (22, 22). Поступим, как и раньше: сначала введем промежуточную функцию u, а потом проведем решение, не вводя ее.

Перепишем задачу:

$$y = \operatorname{arc\,ctg} u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right.}_{\text{производная дроби}}\cdot\underbrace{\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{производная знаменателя дроби}}.$$

Так как $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $u^2 = \frac{1}{x}$, а потому

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

и окончательно

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Мы получили такой же ответ, как и в предыдущей задаче. Этот результат не является случайным, потому что при $\alpha > 0$ имеет место формула $\operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}$, а в нашем случае $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$.

В дальнейшем нам придется ссылаться на соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

Читателя, интересующегося относящимися сюда выводами, отсылаем к книге: С. И. Новоселов. Обратные тригонометрические функции.

Задача 24, 2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{x}\,(x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;
4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos(1 - x^2)$; 6) $y = \arccos\frac{1}{x}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;

3) $y' = \frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$; 4) $y' = -\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$;

5) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 24, 3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{1+x^2}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{1+25x^2}$; 2) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$; 3) $y' = \frac{6x}{1+9x^4}$;

4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$; 5) $y' = -\frac{m}{1+m^2x^2}$;

6) $y' = \frac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

В двух следующих задачах даны упражнения в дифференцировании степеней обратных тригонометрических функций.

Задача 24, 4. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^2 x$; 2) $y = \arcsin^3 3x$; 3) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$.

Решение. 1) Этот пример решим сначала с помощью введения промежуточного аргумента u. Перепишем задачу так: $y = (\arcsin x)^2$.

Пусть $y = u^2$, $u = \arcsin x$,

Поэтому $y' = 2uu' = 2(\arcsin x)(\arcsin x)'$;

$$y' = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Этот же пример решим без введения промежуточного аргумента. У нас $y = \arcsin^2 x$.

Прежде всего следует продифференцировать степень, а так как в степень возводится $\arcsin x$, то вслед за этим надо продифференцировать $\arcsin x$ и производные перемножить:

$$y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Мы настоятельно рекомендуем не вводить промежуточных аргументов.

а) продифференцируем сначала степень;

в) так как в степень возводится $\arcsin 3x$, надо взять производную от $\arcsin 3x$;

с) вычислим производную от $3x$ потому, что арксинус вычисляется от $3x$. Полученные производные перемножим.

Записи расположатся так:

$$y' = \underbrace{3 \arcsin^2 3x}_{\text{производная от степени арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}}_{\text{производная от арксинуса}} \underbrace{\cdot 3}_{\text{производная } 3x}$$

3) Этот пример также решим без введения промежуточного аргумента

$$y' = \underbrace{4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}}_{\text{производная арктангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}$$

Задача 24, 5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^3 x^2$; 2) $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \arccos^4 5x$;

4) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^3}$; 5) $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\arcsin^2 x^2 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $y' = -\frac{4x}{x^4+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$;

3) $y' = -\frac{20\arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; 4) $y' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$;

5) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24, 6.* Продифференцировать:

1) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{1+\sin x}$; 4) $y = \operatorname{arctg}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

Решение. 1) При дифференцировании не будем вводить промежуточных аргументов:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}}_{\text{производная от арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{производная подкоренного выражения}};$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

А так как $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x < x, \end{cases}$

то получаем, что при $x > 0$ $y' = -\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

а при $x < 0$ $y' = -\frac{x}{-x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В первом случае ($x > 0$) получилась производная, равная производной от $\arccos x$, а во втором ($x < 0$) производная получилась

* В этой и следующих задачах буквы a и b имеют такие значения, что содержащие их функции вещественны. Неоднозначность знака не указывается.

такая же, как от арксинуса. Этот результат не случаен. Из тригонометрии известно, что если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x,$$

а при значениях $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi - \arccos x.$$

2) $y' = \underbrace{\sec^2(\arcsin x)}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{\text{производная} \\ \text{арксинуса}}}$;

3) $y' = \underbrace{\frac{1}{\frac{\cos^2 x}{1+(1+\sin x)^2}}}_{\substack{\text{производная} \\ \text{арктангенса}}} \cdot \underbrace{\frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2}}_{\text{производная дроби}}$; $y' = -\frac{1}{2}$.

4) $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2} \cdot \frac{-b\sin x(b+a\cos x) - (-a\sin x)(a+b\cos x)}{(b+a\cos x)^2}$;

$$y' = \frac{-b^2\sin x + a^2\sin x}{(b+a\cos x)^2 + (a+b\cos x)^2}$$ и окончательно

$$y' = \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a^2+b^2) + (a^2+b^2)\cos^2 x + 4ab\cos x}.$$

Задача 24, 7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать:

1) $y = \arcsin x + \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$;

3) $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{1-ax}$

и объяснить простоту полученных результатов.

Ответ. 1) 0; 2) 0; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24, 8. Показать, что каждая из функций

1) $y = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$; 2) $y = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$;

3) $y = \arcsin\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}$

имеет производную, равную $\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Решение. Дифференцирование проведем с подробными записями, но без введения промежуточных аргументов:

1) $y' = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}\right)^2}}}_{\text{производная арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}}}_{\substack{\text{производная} \\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a-b}}_{\substack{\text{производная} \\ \text{подкоренного} \\ \text{выражения}}}$.

В этом примере мы прежде всего дифференцируем арксинус (постоянный множитель 2 сразу вынесен за знак производной). Арксинус берется от корня и, следовательно, нужно взять производную корня. Корень извлекается из дроби, а потому следует вычислить производную дроби (дробь имеет постоянный знаменатель $a-b$, а производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя дроби, разделенной на тот же знаменатель). Производная заданной функции равна произведению полученных выше производных.

После упрощений получаем:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$2)\ y' = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2}}_{\text{производная от арктангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\frac{(a-x)+(x-b)}{(a-x)^2}}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

Упрощения проведите самостоятельно и получите, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$3)\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}\right)^2}} \cdot \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} \times$$

$$\times [-1 \cdot (x-b) + 1 \cdot (a-x)] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(a-x)(x-b)}{(a-b)^2}}} \cdot \frac{2}{a-b} \times$$

$$\times \frac{(-2x+a+b)}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2-4(a-x)(x-b)}} \cdot \frac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

Но выражение под корнем в знаменателе первой дроби равно $(a+b-2x)^2$, а потому получаем, что $y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Задача 24, 9 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функцию

$$y = \arccos\sqrt{\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}}.$$

Ответ.

$$y' = -\sqrt{\frac{3}{\cos x \cos 3x}}.$$