ДВАДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Логарифмическое дифференцирование.

При дифференцировании показательной и логарифмической функций мы будем пользоваться формулами (22,10), (22,11) и (22,12) из основной таблицы формул.

Задача 25, 1. Найти производные функций:

1) $y = a^{3x}$ $(a > 0)$; 2) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 3) $y = 2^{x^3}$;

4) $y = 4^{\sin^2 x}$; 5) $y = e^{x^4}$; 6) $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$;

7) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$ 8) $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$;

9) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; 10) $y = e^{\arcsin^2 x}$.

Решение. 1) По формуле (12,10), если $y' = a^u$ $(a > 0)$, то $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

В нашем случае, полагая $y = a^u$, $u = 3x$, имеем $y' = a^u \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a$.

Здесь снова возникает вопрос о целесообразности введения промежуточного аргумента u.

Можно обойтись без этого. Техника дифференцирования у читателя уже выработалась, а потому все последующие примеры должны решаться без введения вспомогательных переменных. Пример первый должен решаться так: $y' = a^{3x} \ln a\,(3x)'$;

$$y' = \underbrace{a^{3x} \ln a}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{3}_{\text{производная показателя степени}}.$$

2) Здесь также будем пользоваться формулой (22,10):

$$y' = \underbrace{7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{производная показателя степени}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} 7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7.$$

3) По формуле (22,10) имеем:

$$y' = \underbrace{2^{x^3} \ln 2}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{производная показателя степени}} = 3x^2 2^{x^2} \ln 2.$$

4) По формуле (22,10) имеем

$$y' = \underbrace{4^{\sin^2 x} \cdot \ln 4}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{2 \sin x}_{\text{производная степени синуса}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}} = 4^{\sin^2 x} \sin 2x \cdot \ln 4.$$

5) Из формулы (22,10) следует, что производная от функции $y = e^{x^4}$ равна ей же самой, умноженной на производную показателя степени u. Получаем $y' = e^{x^4}(x^4)' = 4x^3e^{x^4}$.

$$6)\ y' = e^{\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

7) Здесь также следует воспользоваться формулой (22,10):

$$y' = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}}.$$

Применим формулу для дифференцирования произведения:

$$y' = (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6);$$
$$y' = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 6).$$

Окончательно после приведения подобных членов в скобке $y' = x^3e^x$.

$$9)\ y' = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}.$$

$$10)\ y' = e^{\arcsin^2 x} \cdot \underbrace{2\arcsin x}_{\text{производная степени арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная арксинуса}}.$$

Задача 25,2 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = a^{x^n}\ (a > 0)$; 2) $y = (a^x)^n\ (a > 0)$;

3) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; 4) $y = \frac{x^4}{e^x}$;

5) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = e^{-x}$.

Ответ. 1) $y' = a^{x^n} \cdot \ln \cdot a \cdot nx^{n-1}$; 2) $y' = na^{nx} \cdot \ln a$;

3) $y' = e^{\operatorname{arc\,tg} x}\frac{1}{1+x^2}$; 4) $y' = \frac{(4x^3 - x^4)}{e^x}$;

5) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = -e^{-x}$.

Задача 25, 3. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Решение. По формуле (22, 12), если $y = \ln u$, то $y' = \frac{1}{u} u'$. Чтобы получить производную от функции $\ln u$, где u — функция x, надо единицу разделить на функцию u, стоящую под знаком логарифма; полученную дробь следует умножить на производную этой функции:

$$y' = \frac{1}{ax+b}(ax+b)' = \frac{1}{ax+b}a = \frac{a}{ax+b}.$$

2) Здесь дифференцируется степень логарифма, а потому

$$y' = \underbrace{5\ln^4 x}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная логарифма}}; \quad y' = \frac{5\ln^4 x}{x};$$

3) $$y' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}} = \operatorname{ctg} x$$

4) Аналогично решается пример 4: $y' = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

5) Здесь следует применить формулу для дифференцирования произведения

$$y' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

6) По формуле для дифференцирования дроби имеем

$$y' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

7) $$y' = \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}}_{\text{производная логарифма}} \underbrace{\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}.$$

После упрощений получим, что $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

8) $$y' = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}; \quad y' = \frac{1}{x \ln x}$$

Задача 25, 3а (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(15e^x + x^2)$; 2) $y = 5^{\ln(x^2+x+1)}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{15e^x + 2x}{15e^x + x^2}$; 2) $y' = 5^{\ln(x^2+x+1)} \ln 5 \cdot \frac{2x+1}{x^3+x+1}$.

Задача 25, 4. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln \frac{x}{1 - x^4}$;

2) $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; 3) $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$.

Решение. Во всех этих примерах прежде чем вычислить производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

1) Перепишем пример в виде $y = \ln x - \ln(1 - x^4)$, а теперь

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x^4}(1 - x^4)' = \frac{1}{x} + \frac{4x^3}{1 - x^4};$$

окончательно

$$y' = \frac{1 + 3x^4}{x(1 - x^4)}.$$

2) Перепишем пример в виде $y = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$, и тогда

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x; \quad y' = \frac{1}{x(1 + x^2)}.$$

3) В преобразованном виде пример запишется так:

$$y = \ln(1 + x) - \ln(1 - x),$$

а поэтому

$$y' = \frac{1}{1 + x}(1 + x)' - \frac{1}{1 - x}(1 - x)',$$

или

$$y' = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \quad y' = \frac{2}{1 - x^2}.$$

Задача 25, 5 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \ln \frac{x^2 - 2}{\sqrt{(6 - 2x^2)^3}}$; 2) $y = \ln \frac{\sqrt[21]{(x + 4)^{13}}\sqrt[28]{(x - 3)^{13}}}{\sqrt[12]{x + 1}}$;

3) $y = \ln \frac{x^2(2x + 4)^7}{(6 + 7x + 2x^2)(2x + 3)^7}$; 4) $y = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{3} - x\sqrt{7}}{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}}$.

Указание. Прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

Ответ. 1) $y' = \frac{x^3}{(x^2 - 2)(3 - x^2)}$; 2) $y' = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$;

3) $y' = \frac{12}{x(6 + 7x + 2x^2)}$; 4) $y' = \frac{\sqrt{21}}{7x^2 - 3}$.

Задача 25, 6 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2 + 2x^2} - x}{\sqrt{2 - 2x^2} + x} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Указание. Под знаком логарифма в первом слагаемом выгодно освободиться от иррациональности в знаменателе. После этого дробь сначала прологарифмировать и только потом приступить к дифференцированию. Производная второго слагаемого найдена в задаче 25,3 (пример 7).

2) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$; 2) $y' = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

Задача 25, 7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

2) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

3) $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$.

Указание. В каждом примере, прежде чем дифференцировать первую дробь, надо ее прологарифмировать.

Ответ 1) $y' = \frac{1}{1+x^4}$; 2) $y' = \frac{x^2}{1+x^4}$; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2+x^4}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто представляется выгодным обе части данного выражения сначала прологарифмировать, по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название логарифмического дифференцирования. Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

т. е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции x.

Способ логарифмического дифференцирования будет подробно рассмотрен на ряде примеров.

Задача 25, 8. Найти производную функций:

1) $y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$;

2) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}$;

3) $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Решение. Во всех предложенных примерах целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

1) Если $y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то $\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(2x-7) + \ln(x-2) + \ln(x+3)$.

Будем считать функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и найдем ее производную:

Производная функции $\ln y$ с учетом того, что y есть функция x, равна $\frac{1}{y}y'$, а потому, вычисляя производную левой и правой частей равенства, получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{2x-7}\cdot 2 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на y и учитывая, что y есть заданная функция, получим

$$y' = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right].$$

2) Поступая так же, как в первом примере, получим

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8) + \frac{1}{6}\ln(x^4-1) - \frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Считая функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+7x-8}(2x+7) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^4-1}4x^3 - \\ - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-3x^2+x-4}\cdot(3x^2-6x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y и зная, что y есть заданная функция, получаем окончательно выражение искомой производной:

$$y' = \frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+7}{x^2+7x-8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1} - \\ - \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-4}\right).$$

3) Здесь опять-таки целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Считая, как и в двух предыдущих примерах, $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

а после умножения обеих частей равенства на y, учитывая, что y есть заданная функция, получаем окончательное выражение производной

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-4}\right).$$

4) Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(ax+b) - \ln(cx+d)].$$

Считая, что $\ln y$ есть сложная функция переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ax+b}\cdot a - \frac{1}{cx+d}\cdot c\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, получим, что искомая производная

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\sqrt{\frac{ax+d}{cx+d}};$$

и после очевидных упрощений окончательно

$$y' = \frac{ad-bc}{2(ax+b)(cx+d)}\sqrt{\frac{ax+d}{cx+d}};$$

Задача 25, 9 (для самостоятельного решения). Найти производные функции:

1) $y = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$; 2) $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

3) $y = \frac{5x^2}{x^2+1}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^4 x$; 4) $y = \frac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$.

Задача 25, 10 (для самостоятельного (решения). Продифференцировать функции:

$$1)\ y=\frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{\sqrt[3]{(x-2)^5(x-4)^7}};\quad 2)\ y=\sqrt{\frac{(2+x)(3-4x)}{(5-2x)(3x-4)}};$$

$$3)\ y=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Теперь мы займемся дифференцированием функций вида

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Читатель должен обратить внимание на тот факт, что для дифференцирования этой функции непригодна формула ни (22,8), ни (22,10), так как в первой из них основание степени u есть функция x, а показатель степени — величина постоянная, во второй основание степени — постоянная величина, а показатель степени — функция x. В рассматриваемом случае и основание степени $f(x)$ и показатель степени $\varphi(x)$ — величины переменные — функции независимой переменной.

В общем виде задача дифференцирования этой функции решается так:

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Прологарифмируем по основанию e обе части равенства и получим

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x).$$

Теперь, считая $\ln y$ сложной функцией переменной x, найдем производную обеих частей последнего равенства, дифференцируя правую часть, как произведение

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая, что $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, получаем окончательно

$$y'=[f(x)]^{\varphi(x)}\left\{\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Запоминать эту формулу не следует, а вместо этого надо хорошо усвоить метод вычисления производной от функций рассматриваемого вида.

Задача 25, 11. Найти производную функции $y=x^x\ (x>0)$.

Решение. Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим $\ln y=x\ln x$ и дифференцируем теперь обе части равенства, считая $\ln y$ сложной функцией x:

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+\frac{1}{x}x;\quad \frac{1}{y}y'=\ln x+1.$$

Умножая теперь обе части равенства на y, который по условию равен x^x, получаем окончательно $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Замечание. В условии задачи указано, что $x > 0$ потому, что x в последующем оказывается под знаком логарифма, а логарифмы можно вычислять только от положительных чисел.

Задача 25, 12. Определить производную функции

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \quad (0 < x < \pi).$$

Решение. Беря натуральные логарифмы обеих частей равенства, получаем

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенной оговорка в условии задачи, что x берется из интервала $(0; \pi)$, так как для значений x из этого интервала $\sin x > 0$ и $\ln \sin x$ имеет смысл). Теперь продифференцируем обе части последнего равенства, считая, что $\ln y$ — сложная функция переменной x:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Умножая обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$, получаем окончательно, что

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left\{ -\sin x \cdot \ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right\}.$$

ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Гиперболические функции. Дифференцирование гиперболических функций. Дифференцирование неявных функций.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Предыдущие практические занятия убедили читателя в широком применении при решении разобранных задач показательной функции e^x. Но кроме самой этой функции как в математике, так и в прикладных науках применяются различные комбинации ее с функцией e^{-x}.

По определению вводятся такие часто встречающиеся комбинации функций e^x и e^{-x}:

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом x и обозначается символом $\operatorname{sh} x$;

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (26, 1)$$