Умножая теперь обе части равенства на y, который по условию равен x^x, получаем окончательно $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Замечание. В условии задачи указано, что $x > 0$ потому, что x в последующем оказывается под знаком логарифма, а логарифмы можно вычислять только от положительных чисел.

Задача 25, 12. Определить производную функции

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \quad (0 < x < \pi).$$

Решение. Беря натуральные логарифмы обеих частей равенства, получаем

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенной оговорка в условии задачи, что x берется из интервала $(0; \pi)$, так как для значений x из этого интервала $\sin x > 0$ и $\ln \sin x$ имеет смысл). Теперь продифференцируем обе части последнего равенства, считая, что $\ln y$ — сложная функция переменной x:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Умножая обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$, получаем окончательно, что

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left\{ -\sin x \cdot \ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right\}.$$

ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Гиперболические функции. Дифференцирование гиперболических функций. Дифференцирование неявных функций.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Предыдущие практические занятия убедили читателя в широком применении при решении разобранных задач показательной функции e^x. Но кроме самой этой функции как в математике, так и в прикладных науках применяются различные комбинации ее с функцией e^{-x}.

По определению вводятся такие часто встречающиеся комбинации функций e^x и e^{-x}:

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом x и обозначается символом $\operatorname{sh} x$;

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (26, 1)$$

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом x и обозначается символом $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \tag{26, 2}$$

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ называется гиперболическим тангенсом x и обозначается символол $\operatorname{th} x$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty); \tag{26,3}$$

$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ называется гиперболическим котангенсом x и обозначается символом $\operatorname{cth} x$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \quad (-\infty < x < 0), \quad (0 < x + \infty). \tag{26, 4}$$

Производные гиперболических функций вычисляются по формулам ($u = u(x)$):

$$y = \operatorname{sh} u; \quad y' = \operatorname{ch} u \cdot u'; \tag{26, 5}$$

$$y = \operatorname{ch} u; \quad y' = \operatorname{sh} u \cdot u'; \tag{26, 6}$$

$$y = \operatorname{th} u; \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'; \tag{26, 7}$$

$$y = \operatorname{cth} u; \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'. \tag{26, 8}$$

Эти формулы следует запомнить.

Задача 26, 1 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ — нечетные, а функция $\operatorname{ch} x$ — четная.

Указание. В формулах (26,1)—(26,2) заменить x на $-x$ и убедиться, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$; $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$, а $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

Задача 26, 2. Вычислить производные функций: 1) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 2) $y = \operatorname{th}^3 x^2$; 3) $y = \ln \operatorname{sh} x$; 4) $y = \cos(\operatorname{ch} x)$.

Решение. 1) Используя правило дифференцирования сложной функции и формулу (26, 5), получаем, что $y' = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$ (проверьте, что из определения гиперболических функций действительно следует, что $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$);

2) $y' = \underbrace{3 \operatorname{th}^2 x^2}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2}}_{\text{производная гиперболического тангенса}} \underbrace{\cdot 2x}_{\text{производная } x^2}$;

3) $y' = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x = \operatorname{cth} x$; 4) $y' = -\underbrace{\sin(\operatorname{ch} x)}_{\text{производная косинуса}} \underbrace{\cdot \operatorname{sh} x}_{\text{производная гиперболического косинуса}}$

Задача 26, 3 (для самостоятельного решения). Вычислить производные функций: 1) $y = \operatorname{ch}^3 x$; 2) $y = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x$; 3) $y = \operatorname{ch}(\sin x)$; 4) $y = \sin(\operatorname{ch} x)$; 5) $y = \ln \operatorname{ch} x$; 6) $y = \ln \operatorname{th} x$; 7) $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + \sin x \cdot \operatorname{sh} x$; 8) $y = \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$; 9) $y = \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x$; 2) $y' = \operatorname{ch}^3 x$; 3) $y' = \operatorname{sh}(\sin x)\cdot\cos x$; 4) $y' = \cos(\operatorname{ch} x)\cdot\operatorname{sh} x$; 5) $y' = \operatorname{th} x$; 6) $y' = \frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 7) $y' = 2\operatorname{sh} x \cos x$; 8) $y' = \operatorname{sch}^4 x$; 9) $y = \frac{2\operatorname{sh} x \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $f(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то y называется неявной функцией x.

Несмотря на то, что уравнение $f(x, y) = 0$ не разрешено относительно y, оказывается возможным найти производную от y по x.

В примерах, которые рассматриваются ниже, указан прием для нахождения производной в случае, когда функция задана неявно. Прием этот состоит в том, что обе части уравнения $f(x, y) = 0$ дифференцируются по x с учетом, что y есть функция x, и из полученного уравнения определяется y'.

Задача 26, 4. Найти производную от неявной функции $5x + 3y - 7 = 0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части ревенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна нулю, получаем $5 + 3y' = 0$; $3y' = -5$; $y' = -\frac{5}{3}$.

Задача 26, 5. Найдем производную y' неявных функций:
1) $x^2 + y^2 - 25 = 0$; 2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Решение. 1) При дифференцировании y^2 по x получается $(y^2)_x = 2yy$.

Здесь сначала продифференцирована степень y, а потом дифференцируется по x основание степени y (производная от y по x есть y'). Обе эти производные на основании правила дифференцирования сложной функции перемножаются.

Дифференцируя обе части равенства, получаем $2x + 2yy' = 0$. Сокращая на 2 и перенося x в правую часть равенства, имеем $yy' = -x$; разрешая это уравнение относительно y', находим, что $y' = -\frac{x}{y}$.

2) При дифференцировании последнего слагаемого второго примера надо применить формулу для дифференцирования произ-

ведения и тогда $(3axy)'_x = 3a(y + xy')$. Поэтому получаем $3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0$.

Сокращаем на 3, раскрываем скобки, переносим члены, не содержащие y', в правую часть равенства и получаем $(y^2 - ax)y' = ay - x^2$, а отсюда $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

Задача 26,6 (для самостоятельного решения). Найти производную y' неявных функций:

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$;

2) $x^3 + y^3 - a = 0$.

Ответ. 1) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$.

Задача 26,7. Найти производную неявных функций:

1) $y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0$; 2) $x^n - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 0$.

Решение. 1) Считая, что y есть функция x, производную по x от y^n находим так:

$$(y^n)' = ny^{n-1}y'.$$

Дифференцируя обе части уравнения, получаем:

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = 0.$$

Умножим теперь обе части последнего равенства на $(x-y)^2$, раскроем скобки в числителе дроби и получим

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x - xy' + y + yy' + x - xy' + y - yy' = 0.$$

У членов, содержащих y', вынесем за скобку y', а остальные члены перенесем в правую часть равенства:

$$y'[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x] = -2y;$$

отсюда уже получаем, что $y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x}$.

Покажем теперь, как использовать условие задачи для того, чтобы упростить это выражение.

У нас в знаменателе дроби есть y^{n-1}, а потому, если умножить числитель и знаменатель дроби на y, то в знаменателе окажется y^n, который можно на основании условия задачи заменить на $\frac{x+y}{x-y}$; выполним эти преобразования: $y' = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy}$; подставим теперь $\frac{x+y}{x-y}$ вместо y^n.

После этого окажется, что

$$y' = -\frac{2y^2}{n\frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2) - 2xy}.$$

2) **Указание.** В полученном выражении для y' на основании условия задачи заменить x^n на $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ответ. $y' = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$.

Задача 26,8 (для самостоятельного решения). Найти производные неявных функций: 1) $y^5 - 5axy + x^5 = 0$; 2) $a^x - e^{x-y} = 0$.

После того как производная y' будет определена, надо учесть, что из условия задачи следует равенство $a^x = e^{x-y}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{ay-x^4}{y^4-ax}$; 2) $y' = 1 - \ln a$.

Задача 26,9. Найти производную неявной функции $e^y = x^{x+y}$.

Решение. В правой части равенства переменными являются и основание степени x, и показатель степени $x+y$, а потому здесь следует сначала прологарифмировать обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

После логарифмирования с учетом того, что $\ln e = 1$, получаем $y = (x+y)\ln x$. Отсюда $y' = (1+y')\ln x + (x+y)\frac{1}{x}$. Раскрывая скобки, имеем:

$$y' = y'\ln x + \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' - y'\ln x = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'(1-\ln x) = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1-\ln x)};$$

и окончательно:

$$y' = \frac{x(\ln x+1)+y}{x(1-\ln x)}.$$

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Параметрическое представление функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В геометрии и механике часто употребляется так называемый параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (27,1)$$