2) **Указание.** В полученном выражении для y' на основании условия задачи заменить x^n на $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ответ. $y' = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$.

Задача 26,8 (для самостоятельного решения). Найти производные неявных функций: 1) $y^5 - 5axy + x^5 = 0$; 2) $a^x - e^{x-y} = 0$.

После того как производная y' будет определена, надо учесть, что из условия задачи следует равенство $a^x = e^{x-y}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{ay-x^4}{y^4-ax}$; 2) $y' = 1 - \ln a$.

Задача 26,9. Найти производную неявной функции $e^y = x^{x+y}$.

Решение. В правой части равенства переменными являются и основание степени x, и показатель степени $x+y$, а потому здесь следует сначала прологарифмировать обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

После логарифмирования с учетом того, что $\ln e = 1$, получаем $y = (x+y)\ln x$. Отсюда $y' = (1+y')\ln x + (x+y)\frac{1}{x}$. Раскрывая скобки, имеем:

$$y' = y'\ln x + \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' - y'\ln x = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'(1-\ln x) = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1-\ln x)};$$

и окончательно:

$$y' = \frac{x(\ln x+1)+y}{x(1-\ln x)}.$$

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Параметрическое представление функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В геометрии и механике часто употребляется так называемый параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (27,1)$$

причем параметр t должен изменяться в таком промежутке, чтобы при изменении его в этом промежутке точка с координатами (x, y) описывала всю кривую или ее рассматриваемую часть.

Предполагается, что каждому значению t соответствует только по одному значению x и y.

Задание кривой уравнениями (27, 1) ***называется параметрическим.***

Если из уравнений (27, 1) можно исключить параметр t, то y определится как явная или неявная функция x. Однако читатель должен знать, что исключение параметра t из уравнений (27, 1) является в большом числе случаев задачей трудной, а иногда и просто неразрешимой.

Задачи (27, 1) — (27, 9) отводятся для упражнений в исключении параметра.

В механике уравнения (27, 1) называются уравнениями движения точки. Если из этих уравнений исключить t, то получится уравнение траектории точки.

Задача 27, 1. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= 8t^2 - 7 \\ y &= 16t^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

и определить линию, определяемую полученным уравнением.

Решение. Из первого уравнения определим t^2 в зависимости от x:

$$t^2 = \frac{x+7}{8}.$$

Подставим это значение t^2 во второе уравнение, и тогда $y = 16 \cdot \frac{x+7}{8} + 4$; $y = 2x + 18$. Линия, определяемая этим уравнением, — прямая. Значит, заданные уравнения определяют прямую.

Задача 27, 2. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t - 4t^2 \\ y &= t - 2t^2 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Если второе уравнение умножить на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим $x - 2y = 0$. Это уравнение определяет прямую, а потому и заданные уравнения есть параметрические уравнения этой прямой.

Задача 27, 3 (для самостоятельного решения). Линия задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= 3t^2 \\ x &= 5t^2 \end{aligned}\right\}.$$

Определить вид линии.

Ответ. Прямая линия $3x - 5y = 0$.

Задача 27, 4. Даны уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5t^2 \\ y &= 3t \end{aligned}\right\}.$$

Определить траекторию точки.

Решение. Исключим из уравнений параметр t. Найдем из второго уравнения t и подставим найденное значение в первое уравнение:

$$t = \frac{y}{3}; \quad x = 5 \cdot \frac{y^2}{9}; \quad y^2 = \frac{9}{5}x;$$

траектория — парабола. Заданные уравнения — параметрические уравнения параболы.

Задача 27, 5. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)?$$

Решение. Для исключения параметра t возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$\begin{aligned} & x^2 = r^2\cos^2 t, \\ + \; & y^2 = r^2\sin^2 t, \\ \hline & x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t); \quad x^2 + y^2 = r^2; \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}. \end{aligned} \qquad (27, 2)$$

Перед корнем выбран знак плюс потому, что когда t изменяется на отрезке $[0, \pi]$, то $y = r\sin t$ не принимает отрицательных значений. Кривая — полуокружность с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

Если бы параметр t изменился на отрезке $[\pi, 2\pi]$, то в (27, 2) следовало бы у корня взять знак минус $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, так как в этом случае $y = r\sin t$ положительных значений не принимает.

Уравнение $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ определяет полуокружность с центром в начале координат, расположенную в нижней полуплоскости.

Если же считать, что параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, то уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$$

определяют две функции: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

Графики этих двух функций в совокупности образуют целую окружность.

Задача 27, 6. Кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Исключить параметр t из этих уравнений.

Решение. Обе части первого уравнения разделим на a, а второго на b:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части каждого из этих уравнений возведем в квадрат и почленно сложим:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ + &\frac{y^2}{a^2} = \sin^2 t \\ \hline &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

кривая — эллипс. Итак, заданные уравнения — уравнения эллипса в параметрической форме. Когда параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, точка на эллипсе описывает всю кривую.

Задача 27, 7 (для самостоятельного решения). Исключить параметр t из уравнений и определить вид кривой:

1) $\left.\begin{aligned} x &= 6\sin\frac{\pi}{3}t \\ y &= 3\cos\frac{\pi}{3}t \end{aligned}\right\}$, 2) $\left.\begin{aligned} x &= 4\sin t \\ y &= 4\cos t \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t^2 \\ y &= 3\sin t^2 \end{aligned}\right\}$, 4) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 4 - 3\sin t \end{aligned}\right\}$.

Ответ. 1) Кривая — эллипс, определяемый уравнением $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. 2) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 16$. 3) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 9$. 4) Кривая — окружность $x^2 + (y - 4)^2 = 9$.

Задача 27, 8. Исключить параметр t из уравнений:

$$x = 2 + 3\cos t,$$

$$y = -3 + 4\sin t.$$

Решение. В первом уравнении из правой части в левую перенесем 2, а во втором — 3. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= 3\cos t \\ y + 3 &= 4\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части первого уравнения разделим на 3, а второго — на 4, после этого обе части каждого уравнения возведем в квадрат и сложим их почленно:

$$+\left.\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{9}&=\cos^2 t\\ \frac{(y+3)^2}{16}&=\sin^2 t\end{aligned}\right\},$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Кривая эллипс, центр которого находится в точке (2, —3).

Задача 27, 9. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Обе части каждого уравнения возведем в степень $\frac{2}{3}$ и почленно их сложим:

$$+\left.\begin{aligned}x^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t\\ y^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\end{aligned}\right\}$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

Кривая — астроида.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Производная функции

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\},$$

заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (27.3)$$

Ниже предлагаются задачи, в которых требуется найти производную от функций, заданных параметрически, минуя определение y как функции x.

Эти задачи не должны вызвать у читателя затруднений, так как предполагается, что техника дифференцирования у него выработана хорошо на большом количестве примеров, решенных на предыдущих практических занятиях.

Поэтому подробно мы рассмотрим решение только двух задач, а остальные должны быть решены самостоятельно. Формула (27,3) используется при решении задач (27, 9) — (27, 13).

Задача 27, 9 а. Найти производную y'_x от функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sin t}{1+b\cos t} \\ y &= \frac{c\cos t}{1+b\cos t} \end{aligned}\right\}. \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}\right\}.$$

Решение. 1) Находим x'_t и y'_t и полученные значения подставляем в формулу (27, 3):

$$x'_t = a\,\frac{\cos t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\sin t}{(1+b\cos t)^2}; \quad x'_t = \frac{a(\cos t+b)}{(1+b\cos t)^2}.$$

$$y'_t = c\,\frac{-\sin t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\cos t}{(1+b\cos t)^2}; \quad y'_t = c\,\frac{-\sin t}{(1+b\cos t)^2}.$$

Теперь по формуле (27, 3) имеем:

$$y'_x = -c\,\frac{\sin t}{a(b+\cos t)};$$

$$2)\ x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}\,\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}\,(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2};$$

находим далее, что и $y'_t = \frac{1}{1+t^2}$, потому $y'_x = 1$.

Замечание. Из тригонометрии известно, что

$$\operatorname{arctg} t = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

и, таким образом, у нас в задаче

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} t \\ y &= \operatorname{arctg} t \end{aligned}\right\},$$

т. е. $y = x$, а потому и $y'_x = 1$.

Если бы это сразу было замечено, то не было бы необходимости находить x'_t и y'_t.

Задача 27, 10. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически,

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t - \cos 2t \\ y &= 2\sin t - \sin 2t \end{aligned}\right\}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$

а потому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}; \quad y'_x = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}; \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1:$$

Задача 27, 11 (для самостоятельного решения). Найти при $t = \frac{\pi}{8}$ производные функций, заданиых параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = a(1-t) \\ y = at \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -1$; 2) $y'_x = \frac{1}{2}$; 2) $y'_x = 0{,}414$; 4) $y'_x = 0{,}833$.

Задача 27,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; 2) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$;

3) $y'_x = -\operatorname{ctg} t$; 4) $y'_x = -1$.

Задача 27,13 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$. 3) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{3a-2t}{at} \\ y = \frac{4(a-t)^3}{a^2t^2} \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -\operatorname{tg} 3t$; 2) $y'_x = -\operatorname{tg} t$; 3) $y'_x = \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциал функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1) Если дана дифференцируемая функция $y = f(x)$, то ее приращение

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{28, 1}$$

где, $\alpha \to 0$, когда $\Delta x \to 0$.