а потому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}; \quad y'_x = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}; \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1:$$

Задача 27, 11 (для самостоятельного решения). Найти при $t = \frac{\pi}{8}$ производные функций, заданиых параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = a(1-t) \\ y = at \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -1$; 2) $y'_x = \frac{1}{2}$; 2) $y'_x = 0{,}414$; 4) $y'_x = 0{,}833$.

Задача 27,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; 2) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$;

3) $y'_x = -\operatorname{ctg} t$; 4) $y'_x = -1$.

Задача 27,13 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$. 3) $\left.\begin{array}{l} x = \frac{3a-2t}{at} \\ y = \frac{4(a-t)^3}{a^2t^2} \end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x = -\operatorname{tg} 3t$; 2) $y'_x = -\operatorname{tg} t$; 3) $y'_x = \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциал функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1) Если дана дифференцируемая функция $y = f(x)$, то ее приращение

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{28, 1}$$

где, $\alpha \to 0$, когда $\Delta x \to 0$.

2. При $\Delta x \to 0$ величина $\alpha\Delta x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем Δx.

3) Из формулы (28, 1) следует, что приращение функции, которая имеет производную в точке x, не равную нулю, может быть представлено в виде суммы двух слагаемых. В первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ приращение Δx независимой переменной входит в первой степени, т. е. оно, как говорят, линейно относительно Δx. Это слагаемое является главной частью приращения функции и называется дифференциалом функции.

Определение. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение независимой переменной. Дифференциал функции обозначается символом dy, и, таким образом, дифференциал функции*

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{28, 2}$$

Определение. *Дифференциалом независимой переменной называется ее приращение: $dx = \Delta x$, и поэтому можно сказать, что* ***дифференциалом функции называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной:***

$$dy = j'(x)\,dx, \tag{28, 3}$$

а формула (28, 1) может быть переписана в виде

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{28, 4}$$

4) Второе слагаемое $\alpha\Delta x$ в (28, 1) при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая высшего порядка малости чем Δx. Из этого следует, что разность $\Delta y - dy$ между приращением функции и ее дифференциалом, равная $\alpha\Delta x$, есть величина бесконечно малая высшего порядка, по сравнению с Δx.

5) Для вычисления дифференциала функции необходимо задать начальное значение независимой переменной x и ее приращение Δx.

6) Если Δx мало, а $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$, входящая в приращение функции, значительно меньше, чем дифференциал функции dy, причем тем меньше, чем меньше Δx.

Поэтому вычисление Δy приращения функции может быть с хорошим приближением заменено вычислением дифференциала функции dy, ***а вычислить дифференциал функции значительно проще, так как для этого требуется только найти производную этой функции и умножить ее на приращение независимой переменной:***

$$\Delta y \approx dy. \tag{28, 5}$$

7) Из формулы (28, 5), учитывая, что

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \tag{28, 6}$$

следует, что $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x$, а *отсюда заключаем, что наращенное значение функции*

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \qquad (28,7)$$

Эта формула позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенное значение функции в точке $x+\Delta x$, *близкой к x, и тем самым дает возможность использовать дифференциал функции для приближенных вычислений.*

8) Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путем умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной dx.

9) Правила дифференцирования:

$$d(cu)=cdu, \qquad (28,8)$$

$$d(u\pm v)=du\pm dv, \qquad (28,9)$$

$$d(uv)=udv+vdu, \qquad (28,10)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}. \qquad (28,11)$$

Задача 28, 1. Определить приращение и дифференциал функции $y=x^3$ при переходе x от значения $x=2$ к значению $x_1=2{,}01$.

Решение. Решим задачу сначала в общем виде, т. е. определим приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx, а потом уже при заданных.

У нас $y=x^3$, а потому, так как $y'=3x^2$, то

$$dy=y'dx=3x^2dx;\quad \Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=$$

$$=x^3+3x^3\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3;$$

$$\Delta y=\underbrace{3x^2\Delta x}_{dy}+\underbrace{3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{\alpha\Delta x}.$$

Таким образом, дифференциал функции и ее приращение найдены при произвольных значениях x и Δx.

Подчеркнутое слагаемое $3x^2\Delta x$, линейное относительно Δx, и есть dy — дифференциал функции.

Теперь определим Δy и dy при заданных числовых значениях. Начальное значение $x=2$. Приращение аргумента

$$\Delta x=x_1-x=2{,}01-2=0{,}01,$$

а потому приращение функции

$$\Delta y=3\cdot 2^2\cdot 0{,}01+3\cdot 2(0{,}01)^2+(0{,}01)^3; \qquad (28,12)$$

$$dy=\underbrace{0{,}12}_{dy}+\underbrace{0{,}0006+0{,}000\,001}_{\alpha\Delta x}=0{,}120601.$$

Дифференциал же функции — первое слагаемое в равенстве (28, 12), $dy = 3 \cdot 2^3 \cdot 0{,}12$.

Теперь определим погрешность, которую мы допустим, если приращение функции заменим дифференциалом функции dy. Эта погрешность равна $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, и мы усматриваем, что она при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

При числовых данных задачи абсолютная величина погрешности от замены приращения функции ее дифференциалом

$$|\Delta x - dy| = |0{,}120\,601 - 0{,}12| = 0{,}000\,601.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000\,601}{0{,}120\,601} = 0{,}00498 \approx 0{,}005$$

в процентах это составляет всего около $\frac{1}{2}$ %. Подчеркнем еще раз, что ***определение дифференциала функции вместо ее приращения дает значительную экономию в вычислениях, а допускаемая пр этом погрешность будет тем меньше, чем меньше приращение аргумента.***

Мы очень подробно разобрали эту задачу и теперь предложим ряд аналогичных задач для самостоятельного решения.

Задача 28, 2 (для самостоятельного решения). Дано $y = 3x^2 + 5x - 4$. Определить Δy и dy при произвольных значениях x и Δx, а потом при переходе x 1) от значения $x = 2$ к значению $x_3 = 1{,}98$; 2) от значения $x = 4$ к значению $x_1 = 4{,}03$.

Ответ. $\Delta y = (6x + 5)\Delta x + 3(\Delta x)^2$, $dy = (6x + 5)dx$; при числовых данных: 1) $\Delta y = -0{,}3388$; $dy = -0{,}34$; 2) $\Delta y = 0{,}8727$; $dy = 0{,}87$. Относительная погрешность в процентах: 1) 0,3; 2) 0,3.

Задача 28, 3 (для самостоятельного решения). Вычислить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 - x^2 + 3$ сначала при произвольных значениях x и Δx, а затем:

1) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3{,}01$ и
2) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3{,}001$.

Найти в этих двух случаях абсолютную и относительную погрешности.

Ответ. $\Delta y = (6x^2 - 2x)\Delta x + (6x - 1)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$;
$dy = (6x^2 - 2x)dx$

при числовых данных: 1) $\Delta y = 0{,}481\,702$; $dy = 0{,}48$; 2) $\Delta y = 0{,}048\,017\,002$; $dy = 0{,}048$; абсолютная погрешность: 1) 0,001702; 2) 0,000 017 002; относительная погрешность в процентах; 1) 0,35; 2) 0,03.

Задача 28, 4. Показать, что при $\Delta x \to 0$ с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Тогда $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$; $dy = nx^{n-1}\Delta x$, а так как на основании (28,5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, то

$$(x + \Delta x)^n - x^n \approx nx^{n-1}\Delta x, \text{ а } (x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

Полагая здесь $x = 1$, получаем, что для достаточно малых Δx имеет место приближенное равенство

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x. \qquad (28, 13)$$

Числовые примеры для приближенных вычислений по формуле (28, 13):

1) $(1{,}03)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}03 = 1{,}15$ $(\Delta x = 0{,}03;\ n = 5)$;

2) $\sqrt{1{,}005} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 = 1{,}0025$ (здесь $n = \frac{1}{2}$, а $\Delta x = 0{,}005$);

3) $\sqrt[3]{0{,}988} = \underbrace{\sqrt[3]{1 - 0{,}012}}_{\left(n = \frac{1}{3};\ \Delta x = -0{,}012\right)} = 1 + \frac{1}{3}(-0{,}012) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$

4) $\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} =$

$$= 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} \approx 4\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{256}\right) = 4(1 + 0{,}0107) = 4{,}0428$$

$$\left(n = \frac{1}{4};\quad \Delta x = \frac{11}{256}\right).$$

Задача 28, 5 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28, 13), вычислить:

1) $\frac{1}{1{,}0005}$; 2) $\frac{1}{0{,}9988}$; 3) $\frac{1}{(1{,}003)^3}$;

4) $\frac{5}{0{,}9997}$; 5) $\frac{37}{1{,}04}$; 6) $\frac{15{,}23}{0{,}999}$.

Указание. 4) $\frac{5}{0{,}9997} = 5 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}0003} = 5(1 - 0{,}0003)^{-1}$; теперь надо взять в (28, 13) $n = -1$; $\Delta x = 0{,}0003$.

Ответ. 1) 0,9995; 2) 1,0012; 3) 0,991; 4) 5,0015; 5) 36,852; 6) 15,246.

Задача 28, 6 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28, 13), вычислить:

1) $\sqrt{4{,}012}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{4{,}028}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}9843}$.

Ответ. 1) 2,003; 2) 0,498; 3) 4,997; 4) 0,995.

Задача 28, 7. При нагревании объем твердого тела растет пропорционально кубу его линейного расширения. Если α — коэффициент линейного расширения, β — коэффициент объемного расширения, а t — температура, то имеет место формула $1+\beta t = (1+\alpha t)^3$.

Пользуясь формулой (28, 13), доказать, что имеет место приближенное равенство $\beta \approx 3\alpha$.

Решение. При малых α $(1+\alpha t)^3 \approx 1+3\alpha t$ и значит, $1+\beta t \approx 1+3\alpha t$; $\beta t \approx 3\alpha t$; $\beta = 3\alpha$, т. е. коэффициент объемного расширения твердого тела приближенно равен утроенному коэффициенту его линейного расширения.

Задача 28, 8. Высота ртутного столба в барометре при температуре t° приводится к 0° по формуле $p_0 = p\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t}$, где α — коэффициент расширения ртути, а α' — коэффициент расширения латунной шкалы. Упростить эту формулу так, чтобы она не содержала дробей.

Решение. По формуле (28, 13) $\frac{1}{1+\alpha t} = (1+\alpha t)^{-1} \approx 1-\alpha t$, а потому $p_0 = p(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = p(1+\alpha' t-\alpha t-\alpha\alpha' t)$. Так как α и α' — малы, то последним произведением в скобке можно пренебречь; окончательно получаем упрощенную формулу

$$p_0 \approx p\,[1-(\alpha-\alpha')\,t].$$

Задача 28, 9 (для самостоятельного решения). Ускорение силы тяжести g_h на высоте h над уровнем моря определяется по формуле

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

где g — ускорение силы тяжести на уровне моря, а R — радиус земли. Считая, что h мало по сравнению с R, доказать, что имеет место приближенная формула

$$g_h \approx g\left(1-\frac{2h}{R}\right).$$

Указание. $R+h = R\left(1+\frac{h}{R}\right)$.

Задача 28, 10. Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\sin\Delta x \approx \Delta x$ (Δx—выражается в радианах).

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Приращение этой функции $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$, а ее дифференциал $dy = \cos x\Delta x$. На основании формулы (28, 5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$,

а потому $\sin(x+\Delta x)-\sin x\approx\cos x\cdot\Delta x$, или $\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+$ $+\cos x\cdot\Delta x$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $\sin 0=0$, а $\cos 0=1$, получаем требуемое приближенное равенство

$$\sin\Delta x\approx\Delta x. \qquad (28,\ 14)$$

Эта формула показывает, что для малых углов (выраженных в радианах) синус равен числу радианов, содержащихся в угле. Например, так как $4^\circ=0{,}0698$ радиана, то $\sin 0{,}0698\approx 0{,}0698$. Это же значение для $\sin 4^\circ$ дают и четырехзначные таблицы (не забудьте, что при использовании формулы (28, 14) следует градусы переводить в радианы).

Заметим, что формула (28, 14) для углов, не больших 3°, дает величину синуса с четырьмя верными десятичными знаками (для перевода градусов в радианы и обратно следует пользоваться справочниками). Для углов же, не превышающих 7°, эта формула дает значение синуса с тремя верными десятичными знаками.

Задача 28, 11 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — величина бесконечно малая то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\operatorname{tg}\Delta x\approx\Delta x. \qquad (28,\ 15)$$

Применить это равенство к вычислению $\operatorname{tg}3^\circ$ и сравнить полученное число со значением $\operatorname{tg}3^\circ$ из четырехзначных таблиц.

Задача 28, 12 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{\Delta x}{x}. \qquad (28,\ 16)$$

Указание. Рассмотреть функцию $y=\ln x$. Приращение этой функции

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{\Delta}\right);\quad dy=\frac{1}{x}\,dx.$$

Из формулы (28, 16) следует, что, например,

$$\ln 1{,}007=\ln(1+0{,}007)\approx 0{,}007;$$

$$\ln 1{,}008=\ln(1+0{,}008)\approx 0{,}008.$$

Задача 28, 13 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x. \qquad (28,\ 17)$$

Получить это же равенство из формулы (28, 16).

Указание. Рассмотреть функцию $y = e^x$.

$$\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1),$$

$$dy = e^x \Delta x.$$

Пользуясь формулой (28, 17), можно получить приближенные значения $e^{\Delta x}$ при малых значениях Δx. Например, $e^{0,003} \approx 1 + 0,003 = 1,003$; $e^{0,009} \approx 1 + 0,009 = 1,009$; $e^{0,04} \approx 1 + 0,04 = 1,04$ (все десятичные знаки верны).

Приведем сводку полученных приближенных формул (28, 13), (28, 14), (28, 15) (28, 16), (28, 17), причем во всех этих формулах заменим для удобства Δx, а в последней $\frac{\Delta x}{x}$, буквой α;

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha; \quad e^\alpha \approx 1 + \alpha,$$

$$\sin \alpha \approx \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha;$$

$$\ln (1 + \alpha) \approx \alpha;$$

Задача 28, 14. Составить таблицу для вычисления значений функции $y = \sin x$ при значениях x, равных $30°1'$; $30°2'$; $30°3'$, имея в виду, что $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0,00029$ радиана.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. При переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$ наращенное значение функции определяется из приближенного равенства (28, 7). У нас $f(x) = \sin x$. Поэтому $f(x + \Delta x) = \sin (x + \Delta x)$, а $f'(x) = \cos x$. Для заданной функции $f(x) = \sin x$ приближенное равенство (28,7) запишется так:

$$\sin (x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \qquad (28, 18)$$

Полагая в этой формуле $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1' = 0,00029$, а $\sin 30° = 0,50000$; учитывая, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86602$, получим

$$\sin 30° 1' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00029 = 0,50025,$$

что совпадает точно со значением $\sin 30° 1'$ по пятизначным таблицам.

Из формулы (28, 18) найдем и $\sin 30° 2'$, учитывая, что теперь $\Delta x = 2' = 2 \cdot 0,00029 = 0,00058$ радиана и по-прежнему $x = 30°$.

$$\sin 30° 2' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00058 = 0,50050$$

(все десятичные знаки верны).

При вычислении $\sin 30° 3'$ воспользуемся той же формулой, взяв $\Delta x = 3' = 3 \cdot 0,00029 = 0,00087$;

$$\sin 30° 3' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00087 = 0,50075$$

(это значение отличается от табличного на 0,00001 (по пятизначным таблицам $\sin 30° 3' = 0{,}50076$).

Задача 28,15 (для самостоятельного решения). Составить таблицу для вычисления функции $\cos x$ при значениях x, равных $60° 1'$; $60° 2'$; $60° 3'$ (для справок $\sin 60° = 0{,}86602$: $\cos 60° = 0{,}50000$; $1' = 0{,}00029$ радиана).

Полученные значения сравнить со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28, 16 (для самостоятельного решения). Вычислить $\operatorname{tg} 45° 1'$, $\operatorname{tg} 45° 2'$, $\operatorname{tg} 45° 3'$ и сравнить полученные значения со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28, 17. Вычислить натуральные логарифмы чисел 2,001; 2,002; 2,003; 2,004 и сравнить их с табличными значениями по пятизначным таблицам натуральных логарифмов (для справки: $\ln 2 = 0{,}69315$).

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Чтобы применить формулу (28, 7), надо определить $f(x + \Delta x)$ и $f'(x)$:

$$f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x); \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Подставляя эти значения в (28, 7), получаем

$$\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x}\Delta x. \qquad (28, 19)$$

Чтобы найти $\ln 2{,}001$, возьмем в формуле (28, 19) $x = 2$, а $\Delta x = 0{,}001$:

$$\ln 2{,}001 = \ln(2 + 0{,}001) \approx \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 =$$

$$= 0{,}69315 + 0{,}00050 = 0{,}69365.$$

Аналогично по формуле (28, 19) вычисляется $\ln 2{,}002$; $\ln 2{,}003$ и $\ln 2{,}004$: берем по-прежнему $x = 2$, а Δx надо взять равным соответственно 0,002; 0,003; 0,004. Имеем

$$\ln 2{,}002 = \ln(2 + 0{,}002) \approx 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}002 = 0{,}69315 +$$

$$+ 0{,}001 = 0{,}69415; \quad \ln 2{,}003 = \ln(2 + 0{,}003) \approx 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}003 =$$

$$= 0{,}69315 + 0{,}0015 = 0{,}69465; \quad \ln 2{,}004 = \ln(2 + 0{,}004) \approx 2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 0{,}004 = 0{,}69315 + 0{,}0020 = 0{,}69515.$$

Пятизначные таблицы логарифмов дают значения, равные найденным. Решение последних задач показало читателю, как диф-

ференциал функции может быть использован для составления таблиц тригонометрических функций и логарифмов. Формула (28,7) позволяет составлять таблицы и других функций.

Мы считаем необходимым обратить внимание на то, что заменяя во всех предыдущих задачах приращение функции Δy ее дифференциалом dy, мы не интересовались оценкой погрешности, которую мы при этом допускаем. В последующем, при изучении раздела «Бесконечные ряды», будут указаны более совершенные приемы составления таблиц функций и там указаны формулы, оценивающие погрешность, возникающую при замене точного значения функции ее приближенным значением.

Задача 28.18. Прямым измерением найдено, что диаметр круга равен 6,7 *см*, причем максимальная погрешность измерения составляет 0,03 см. Найти приближенную относительную и процентную погрешности в вычисленной площади этого круга.

Решение. Относительная погрешность вычисленной площади $\delta_s = \frac{\Delta s}{s}$, а ее приближенное значение мы получим, заменив в этом равенстве Δs на ds. В таком случае $\delta_s \approx \frac{ds}{s}$. Но площадь круга $s = \frac{1}{4}\pi x^2$ (x — диаметр), а поэтому $ds = \frac{1}{2}\pi x\, dx$. Таким образом,

$$\delta_s \approx \frac{\frac{1}{2}\pi x\, dx}{\frac{1}{4}\pi x^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x}.$$

У нас $x = 6{,}7$ *см*; $dx = 0{,}03$ *см*, а потому $\delta_s \approx$

$\approx 2 \cdot \frac{0{,}03}{6{,}7} \approx 0{,}009$, а умножая эту величину на 100, получим процентную погрешность, которая равна $(0{,}009 \cdot 100)\% = 0{,}9\%$.

Задача 28,19. Доказать, что приближенная относительная погрешность вычисленного объема шара равна утроенной относительной погрешности в измерении его диаметра.

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{1}{6}\pi x^3$, где x — диаметр шара. Приближенно погрешность ΔV вычисленного объема равна $dV = \frac{1}{2}\pi x^2\, dx$. Относительная погрешность

$$\delta_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2\, dx}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \cdot \frac{dx}{x}.$$

Но относительная погрешность измерения диаметра $\delta_x \approx \frac{dx}{x}$, а потому $\delta_V \approx 3\delta_x$, что и требовалось.

Задача 28,20 (для самостоятельного решения). С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 2%.

Ответ. $\delta_R = 0{,}66\%$.

Задача 28,21 Период малых колебаний маятника (в секундах) определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{28,20}$$

где l — длина маятника в сантиметрах, а $g = 981$ *см/сек*^{2} — ускорение силы тяжести.

Доказать, что приближенная относительная погрешность измеренного периода колебания маятника равна половине относительной погрешности его измеренной длины.

Решение. Приближенно абсолютная погрешность периода колебания $\Delta T \approx dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}$, а потому относительная погрешность

$\delta_T \approx \frac{dT}{T} = \frac{\frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}$, а так как относительная погрешность

измерения длины маятника $\delta_l = \frac{dl}{l}$, то $\delta_T \approx \frac{1}{2}\delta_l$, и требуемое доказано.

Задача 28,22 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28,20), установить, насколько следует изменить длину маятника $l = 25$ *см*, чтобы его период T увеличился на 0,05 *сек*.

Ответ. $dl = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\sqrt{l}\,dT$; $dl = 2{,}49$ *см*.

Задача 28,23 (для самостоятельного решения). Из формулы (28,20) следует, что определение ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника может быть сделано по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Определить относительную погрешность в определении g, если известны:

1) относительная погрешность в измерении l (T вычислено точно);

2) относительная погрешность в измерении T (l вычислено точно).

Ответ. 1) $\delta_g = \delta_l$; $\delta_g = 2\delta_T$;