Задача 29, 28 (для самостоятельного решения) $y = e^x \cos x$. Найти $y^{(5)}$.

Ответ. $y^{(5)} = 4\sqrt{2}\, e^x \cos\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$.

ТРИДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых и двух бесконечно больших величин (раскрытие «неопределенностей» видов: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и приводящихся к ним).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может оказаться, что при $x \to a$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с «неопределенностями» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Вычисление предела в этом случае называется «раскрытием неопределенности» и производится по правилу, указанному французским математиком Гильомом Лопиталем (1661—1704 гг.)

Правило Лопиталя. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что*

1) $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0;$$

или

$$\lim_{x \to x} f(x) = \pm\infty \text{ и } \lim_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty;$$

2) они имеют первые производные в окрестности точки $x = a$ (за возможным исключением самой точки a);

3) существует $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует также и $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и имеет место равенство $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Сущность этого правила состоит в том, что в случае «неопределенностей» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большом числе случаев оказывается проще.

В случае, когда и отношение производных приводит к одному из этих видов «неопределенностей» $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можно уже к этому

отношению применить правило Лопиталя и тем самым исследовать отношение вторых производных. Может оказаться, что и отношение вторых производных дает опять-таки какую-либо из этих «неопределенностей». Тогда следует перейти к отношению третьих производных и т. д. Укажем, что если понадобится прибегнуть к отношению вторых, третьих и т. д. производных, то прежде чем это делать, следует провести все возможные упрощения в выражении, полученном на предыдущем этапе.

1. Предел отношения двух бесконечно малых величин $\left(\text{«неопределенности» вида } \frac{0}{0}\right)$

Задача 30, 1. Найти $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.

Если в заданное отношение подставить вместо x число a, то получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных.

Следует предостеречь читателя от распространенной ошибки: надо дифференцировать не дробь, а отдельно ее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{a} a^{m-n}.$$

Задача 30, 2. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$.

Решение. Если в данную дробь подставить -1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Задача 30, 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$.

Решение. Если заменить в данной дроби x нулем, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя: заменим числитель и знаменатель дроби их производными и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{n}(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (-nx^{n-1})}{nx^{n-1}}.$$

Сокращая дробь на nx^{n-1} и подставляя после этого $x=0$, получим, что искомый предел равен $\frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{a^{1-n}}{n}$.

Если бы мы не произвели сокращения на nx^{n-1}, то снова имели бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Еще раз напоминаем, что прежде чем решить вопрос о необходимости перехода к следующим производным, надо сделать все возможные упрощения.

Задача 30,4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. Если подставить в числитель и знаменатель 1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2}=-1.$$

И здесь были сделаны необходимые упрощения. Если бы мы их не сделали, а в полученную дробь подставили бы $x=1$, то снова получили бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Задача 30,5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Подставляя в данную дробь $x=0$, получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\substack{\text{Снова «неопределенность» вида}\\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{3}\text{ выносим за знак}\\ \text{предела, вторично применяем правило}\\ \text{Лопиталя.}}}=\underbrace{\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}_{\substack{\text{Снова «неопределенность» вида}\\ \frac{0}{0}.\text{ В третий раз применяем правило}\\ \text{Лопиталя.}}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Теперь предлагается ряд задач для самостоятельного решения.

Задача 30,6 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^3+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Указание. В числителе сначала вынести x за скобку, и тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\,\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x};$$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+e^{-x}-e^x-xe^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Указание. Разложить числитель на множители и сократить дробь.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{3}{29}$; 3) $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; 4) 0; 5) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; 6) $a\sqrt{3}$; 7) $\ln\frac{a}{b}$; 8) $\sqrt{a}$; 9) -2; 10) -1.

Задача 30,7 (для самостоятельного решения). Для вычисления пределов в этой задаче правило Лопиталя придется применять не менее двух раз. Найти пределы;

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$.

Указание. Искомый предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2;$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 4; 5) $\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$; 6) ∞.

Задача 30,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$$

Указание. Здесь «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1;\quad \ln 1=0;\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. -1.

2. Предел отношения двух бесконечно больших величин $\left(\text{«неопределенность» вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Задача 30,9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Замечание. В условии задачи подчеркнуто, что $x\to+0$; это указание является существенным, потому что при $x\to-0$, так же как при $x\to 0$, $\ln x$ не существует, так как отрицательные числа логарифмов не имеют.

Решение. При $x\to+0$ числитель и знаменатель данной дроби — величины бесконечно большие, и мы имеем здесь случай «неопределенности» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

На основании правила Лопиталя заменяем отношение функций отношением их производных и отыскиваем предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Задача 30,10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\operatorname{tg}3x$ и $\operatorname{tg}5x$ — величины бесконечно большие, т. е. мы имеем «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}}_{\text{Здесь имеет место «неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{. Прежде чем применять правило Лопиталя, преобразуем дробь.}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 = \underbrace{\frac{3}{5} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2}_{\text{Предел степени равен степени предела. Применяем теперь правило Лопиталя}} = \frac{3}{5} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{9} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3}.$$

Задача 30,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Ответ. 0.

Задача 30,12. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Здесь имеет место «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\text{Здесь «неопределенность» вида } \frac{\infty}{\infty}\text{. Вторично применим правило Лопиталя.}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2}}_{\text{Здесь уже никакой «неопределенности» нет.}} = +\infty.$$

Задача 30,13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}; \quad 2)\ \lim_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}.$$

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30,14 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x}; \quad 2)\ \lim_{x \to a-0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{a}}; \quad 3)\ \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln(x-1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x},$$

Ответ. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) -2.

3. Разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty - \infty$)

Если

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \ \text{ и } \ \lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty. \tag{30 1}$$

то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$ *надо преобразовать эту разность* $f(x)-\varphi(x)$ *к такому виду:*

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}};\ \textit{тогда}\ \lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}.$$

Учитывая (30,1), заключаем, что теперь мы должны исследовать «неопределенность вида» $\frac{0}{0}$, *которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.*

Задача 30,15. Найти: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ — бесконечно большие величины одного и того же знака, а потому мы имеем здесь разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty-\infty$). Разность $\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$;

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{«неопределенность» вида }\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=$$

$$=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Задача 30,16. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ дроби $\frac{2}{x^2-1}$ и $\frac{1}{x-1}$ — величины бесконечно большие одного и того же знака, а потому их разность приводит к «неопределенности» вида $\infty-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, приводим к общему знаменателю и получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}}_{\text{«неопределенность» вида }\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 30,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Ответ. 0.

Задача 30,18 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$.

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1.

Задача 30,19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2}=-\infty \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(e^{2x}-1)}=+\infty.$$

Значит, мы имеем «неопределенность» вида $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(e^{2x}-1)+2x}{2x^2(e^{2x}-1)}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{; в числителе раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов.}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^{2x}+x+1}{x^2(e^{2x}-1)}}_{\text{Применяем правило Лопиталя.}}=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2(x-1)e^{2x}+1}{2x(e^{2x}-1)+2x^2e^{2x}}}_{\text{Опять «неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{. Прежде чем вторично применять правило Лопиталя, упростим числитель и знаменатель дроби.}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(2x-1)+1}{e^{2x}(x+x^2)-x}}_{\text{Снова применяем правило Лопиталя}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{2e^{2x}(x+x^2)+e^{2x}(1+2x)-1}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}.}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}(2x-1)+4e^{2x}+4e^{2x}}{4e^{2x}(x+x^2)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}}=\frac{1}{4}\,\frac{4}{2+2+2}=\frac{1}{6}.$$

4. Произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$)

«Неопределенности» этого вида могут быть сведены к «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$. *Действительно, пусть*

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \text{а}\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty. \tag{30,2}$$

Записав

$$f(x)\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \quad \text{или} \quad f(x)\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \tag{30,3}$$

мы получим, что

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)}_{\text{«Неопределенность» вида } 0\cdot\infty} = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}}_{\text{На основании (30,2) здесь «неопределенность» вида } \frac{0}{0}.} = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}}_{\text{На основании (30,2) здесь «неопределенность» вида } \frac{\infty}{\infty}.}$$

При решении задач в этом случае следует выражение $f(x)\cdot\varphi(x)$ записать в одном из видов (30,3).

Задача 30,20. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ (см. замечание в задаче 30,9).

Решение. При $x\to+0$ $\ln x$ — величина бесконечно большая, а x — бесконечно малая. Поэтому здесь имеет место «неопределенность» вида $0\cdot\infty$. Применяем преобразование, указанное в (30,3):

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\text{: применяем правило Лопиталя.}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

Задача 30,21. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, а потому при $x\to+\infty$ выражение xe^{-x} — произведение величины бесконечно большой на бесконечно малую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$). Так как $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, то

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}_{\text{Неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\text{. Применяем правило Лопиталя.}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

Задача 30,22 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$; 2) $\lim\limits_{x\to+0} x^n\ln x$ $(n>0)$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) 0.

Задача 30, 23 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec\frac{\pi}{2}x\cdot\ln\frac{1}{x}$.

Ответ. 1) 0, 2) $-\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{2}{\pi}$.

5. «Неопределенности» видов 1^∞; ∞^0, 0^0

«Неопределенности» этих видов сводятся к «неопределенности» вида $0\cdot\infty$, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе. Это достигается с помощью тождества

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)} \tag{30, 4}$$

в предположении, что $f(x)>0$ (это предположение необходимо сделать, так как в показателе степени в правой части равенства $f(x)$ стоит под знаком логарифма). Теперь можно написать, что

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}$$

и дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Задача 30, 24. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$ («неопределенность» вида 0^0).

Решение. На основании (30, 4) можем записать, что $x^x=e^{x\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}. \tag{30, 5}$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$ (здесь «неопределенность» вида $0\cdot\infty$):

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределен-}\\\text{ность вида }\frac{\infty}{\infty}.\\\text{Применяем}\\\text{правило Лопи-}\\\text{таля.}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

Подставляя этот результат в (30, 5), получим, что

$$\lim_{x\to+0}x^x=e^0=1.$$

Задача 30, 25. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида 1^{∞})

Решение. На основании (30, 4) имеем $(1+mx)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}$, а потому

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}; \qquad (30,6)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}_{\text{«неопределенность» вида } 0\cdot\infty;}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}}_{\text{«неопределенность вида } \frac{0}{0}.}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1}=m.$$

Подставляя найденное значение в (30, 6), получим что

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=e^{m}.$$

Задача 30, 26 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида ∞^{0});

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ («неопределенность» вида ∞^{0}).

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30, 27. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ («неопределенность» вида 1^{∞}).

Решение. На основании (30, 4) $\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}};$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}_{\substack{\text{«неопределенность» вида}\\ 0\cdot\infty,\ \text{т. к. } \frac{\operatorname{tg}x}{x}\to 1,\\ \text{когда } x\to 0}}=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}{x^2}}_{\text{«неопределенность» вида } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{tg}x-\ln x}{x^2}=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\sec^2x-\frac{1}{x}}{2x}}_{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2x=\frac{2}{\sin 2x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}}{x}=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2x-\sin 2x}{x^2\cdot\sin 2x}}_{\text{Применяем правило Лопиталя}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2-2\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2 \sin 2x}{\sin 2x + 2x \cos 2x + 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{. Вторично применяем правило Лопиталя}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +0} \frac{4 \cos 2x}{2 \cos 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x - 4x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2+4} = \frac{1}{3}.$$

И тогда $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 30, 28 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Ответ. 1) 1; 2) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 3) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a^2}{2}}$.

Задача 30, 29 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x \to +0} (-\ln x)^x$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Ответ. 1) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$; 2) e; 3) e^{-1}; 4) 1; 5) 1.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Возрастание и убывание функций.

Краткие сведения из теории

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*